



Homogénéisation périodique d'un matériau cellulaire en élasto-plasticité et application au calcul de structures : des petites aux grandes déformations

Alexandre Iltchev

► To cite this version:

Alexandre Iltchev. Homogénéisation périodique d'un matériau cellulaire en élasto-plasticité et application au calcul de structures : des petites aux grandes déformations. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2014. Français. NNT : 2014ENMP0044 . tel-01142233

HAL Id: tel-01142233

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-01142233>

Submitted on 14 Apr 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris

Spécialité Mécanique

présentée et soutenue publiquement par

Alexandre ILTCHEV

le 16 décembre 2014

**Homogénéisation périodique d'un matériau cellulaire en élasto-plasticité et
application au calcul de structures : des petites aux grandes déformations**

**Periodic homogenisation of a cellular material in elastoplasticity and
application to structural modelling : from small to large deformations**

Directeur de thèse : **Samuel FOREST**

Co-encadrement de la thèse : **Vincent MARCADON, Serge KRUCH, Bertrand LANGRAND**

Jury

M. Djimédo KONDO, Professeur, Institut Jean le Rond d'Alembert, UPMC

M. Jean-Claude MICHEL, Directeur de Recherche, LMA, CNRS

M. Pierre GILORMINI, Directeur de recherche, PIMM, Arts et Métiers-ParisTech / CNRS

M. Nicolas CARRERE, Enseignant-Chercheur, LBMS, ENSTA Bretagne

M. Amine BENZERGA, Associate Professor, TiiMS, Texas A&M University

M. Vincent MARCADON, Ingénieur de Recherche, DMSM, Onera

M. Samuel FOREST, Directeur de Recherche, CdM, MINES-ParisTech / CNRS

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

Encadrant

Directeur de thèse

**T
H
È
S
E**

Remerciements

Il est évident qu'un travail de thèse ne peut être réalisé que bien entouré. J'ai eu cette chance et je souhaite remercier toutes les personnes qui m'ont aidé scientifiquement et personnellement au cours de ces années de thèse.

Je remercie mon jury de thèse qui a pris de son temps pour me permettre de présenter mes travaux lors du sprint final de la soutenance. Pierre Gilormini, merci d'avoir présidé mon jury, pour la justesse de vos remarques et pour les encouragements dès nos premiers échanges. Djimédo Kondo et Jean-Claude Michel, merci pour votre rapidité et votre rapport. Amine Benzerga, grâce à une heureuse coïncidence de calendrier, et Nicolas Carrere, je vous remercie d'avoir participé en tant qu'examineurs à mon jury.

Samuel Forest, je souhaite également t'exprimer ma gratitude. J'ai eu beaucoup de chance de t'avoir eu en tant que directeur de thèse et de travailler avec toi. Tu m'as beaucoup appris et, encore aujourd'hui, je regarde avec humilité ton aide comme essentielle à mon travail.

J'ai eu le privilège de recevoir une aide précieuse de la part de Jacques Besson. Merci beaucoup pour le modèle que tu m'as donné à un moment crucial de mon travail et pour les nombreuses discussions que nous avons pu avoir.

J'ai eu la chance de partager mon quotidien avec des personnes formidables à l'Onera de Châtillon tant dans mon travail scientifique que dans tous les autres moments. Vincent et Serge, je vous remercie chaleureusement pour absolument tout ce que vous m'avez appris. J'ai eu le sentiment de réellement me former grâce à vos conseils. Serge, merci pour ta disponibilité et ton pragmatisme. Vincent, merci pour ta confiance et ta patience. Je n'aurais pas pu imaginer de meilleur encadrement pour ces années de recherche. Je vous souhaite une très bonne continuation et j'ai été heureux de faire ce bout de chemin avec vous.

Incroyables équipes MCE et MNU, j'ai apprécié chacun de mes jours passés avec vous, Jean-Didier, Johann, Louise, Vincent, Florent, Anaïs, Arjen, Didier, Vincent, Pascale, Frédéric, Sylvia, Franck et Jean-Louis. Les débats et discussions avec vous tous, que ce soit lors des repas de midi ou lors des pauses cafés, ne m'ont jamais ennuyé. Que vous soyez encore dans l'équipe ou ailleurs, il y avait une ambiance qu'il est précieux de garder et

grâce à laquelle de nombreux doctorants ont ainsi pu se former. Je souhaite aussi vous remercier Bertrand et Gérard pour votre accueil à l'Onera de Lille, j'ai beaucoup apprécié travailler avec vous. Merci à Fabienne et Cécile pour les échantillons et les différents échanges que nous avons eus dans le cadre de DynaCell.

J'ai aussi croisé le chemin de personnes exceptionnelles au cours de leur thèse ou post-doctorat. Je pense à vous Amélie, Xavier, Emmanuel, Francesco, Jean-Patrick et Georges qui, au moment où j'écris ces lignes, êtes encore doctorants. Profitez-en bien et bon courage! Je pense aussi à vous Noémie, Olivier, Jean-Roch, Robin, Teddy et Dominique. Merci à vous tous. Olivier, je te remercie pour m'avoir formé au travail du bois et pour m'avoir toujours, toi et Camille, accueilli chez vous chaque fois avec autant de gentillesse. Cette passion pour le bois m'a beaucoup aidé. Jean-Roch, merci pour nos discussions en rentrant à pied chez nous. Je suis très heureux de t'avoir rencontré. Robin, merci pour toutes nos sorties et bons moments passés devant une bonne assiette ou derrière des bons verres. Teddy, je dois immortaliser sur le papier combien je suis désolé de t'avoir oublié dans mes remerciements de soutenance, parce que s'il y a une personne que je dois remercier, c'est bien toi. Je te remercie pour nos innombrables discussions, Zap et autre Black Album... C'était toujours un grand plaisir avec le meilleur co-bureau! Dominique, au delà des moments au labo, merci pour ces années de colocation. J'ai apprécié tous les moments passés dans cet appart avec le meilleur coloc!

Je remercie également les estiniens pour toutes les sorties et aventures de ces dernières années. Jérémy, Julien, Hugo, Damien, Pierre, Paul et Nicolas et tous les autres qui n'étaient pas à Paris. Je suis heureux de vous avoir eus auprès de moi lors des bons moments et des moments difficiles. Nico et Paul, merci encore pour ces moments à Berlin pendant la thèse. J'imagine que je dois remercier l'UFO, non?

Iliya, Mariana, Guillaume, maintenant Gabriel aussi, Maman, Papa, merci pour tout. C'est une force incroyable que d'avancer dans la vie auprès de vous. Mamo, tatko, vsitcho tova beshe vazmojno blagodarenie na vas, vsitcho vi dalja, merci.

Ces années n'étaient pas qu'un apprentissage professionnel, c'était aussi une poursuite du beau et du bien inspirés par toi, Elise. Je t'avais heureusement avec moi pendant cette thèse pour me motiver et pour me révéler toutes ces choses à découvrir. Merci pour tout. Ce chapitre se ferme. Maintenant, allons vers la prochaine aventure ensemble.

Alexandre Iltchev
15 février 2015

Table des matières

Introduction	5
1 Etat de l'art	11
1.1 Les matériaux cellulaires	12
1.1.1 Effets de l'architecture sur le comportement macroscopique	12
1.1.2 Architectures aléatoires et influence des défauts	13
1.1.3 Effet de taille de l'architecture mésoscopique	14
1.1.4 Rôle du matériau constitutif	14
1.1.5 Instabilités et effets de structure	15
1.2 Modélisation des architectures cellulaires	16
1.3 Méthodes de modélisation multi-échelle	17
1.3.1 Calculs du comportement effectif du Volume Elémentaire Représen- tatif d'un matériau cellulaire	18
1.3.2 Méthodes multi-échelles numériques intégrées de calcul de structures	19
1.3.3 Lois Homogènes Equivalentes	20
1.4 Conclusion	21
2 Homogénéisation périodique en grandes déformations	23
3 Homogénéisation périodique et caractérisation du comportement élasto- plastique des empilements de tubes	31
3.1 Periodic homogenisation analysis of cellular structures	32
3.1.1 Homogenisation method	32
3.1.2 Homogenised uni-axial mechanical responses	35
3.1.3 Planar bi-axial yield surfaces	39
3.1.4 General multi-axial loading cases	43
3.2 Identification of homogeneous equivalent laws	43
3.2.1 Square stacking	43
3.2.2 Hexagonal squacking	48
3.2.3 Effective mechanical properties	49
3.3 Modelling of sandwich structures	50
3.3.1 Geometries and models	52
3.3.2 Results and boundary layer effects	55
3.4 Résultats complémentaires	64

3.4.1	Calculs sur le Volume Élémentaire Représentatif	64
3.4.2	Comportement inélastique multi-axial non-quadratique de l'empilement hexagonal	67
3.4.3	Lois Homogènes Equivalentes et anisotropie hors-plan	72
3.4.4	Modélisation de structures sandwichs sollicitées en flexion	81
3.5	Conclusion	86
4	Simulation du comportement mécanique des architectures cellulaires sous chargements sévères	89
4.1	Caractérisation expérimentale du comportement de structures sandwichs en compression	90
4.2	Modélisation des structures sandwichs de taille finie	95
4.2.1	Définition des hypothèses de modélisation	95
4.2.2	Réponses mécaniques des structures sandwichs pour des chargements en compression	101
4.3	Caractérisation du comportement macroscopique de cellules périodiques . .	111
4.3.1	Etude de l'empilement carré	111
4.3.2	Etude de l'empilement hexagonal	115
4.3.3	Modes d'instabilité et Volume Élémentaire Représentatif	115
4.3.4	Caractérisation du comportement bi-axial de la cellule périodique . .	124
4.4	Identification d'une Loi Homogène Equivalente en grandes déformations . .	130
4.4.1	Empilement carré	130
4.4.2	Empilement hexagonal	131
4.5	Conclusions	138
	Conclusions et perspectives	141
	Annexe A Homogénéisation périodique en grandes déformations et application avec présence de vide dans Z-set	145
	Annexe B Déformations planes généralisées	151
	Annexe C Contrôle de calculs éléments finis à l'aide de critères post-traités	153
	Annexe D Vérification de la convexité du critère de Hill à coefficient négatifs	157
	Annexe E Réponses mécaniques de structures sandwichs pour des chargements quasi-statiques et dynamiques	159

Introduction

Contexte

La réduction de la masse des aéronefs est l'une des problématiques principales de l'industrie aéronautique, notamment pour améliorer leurs performances et diminuer leurs coûts d'exploitation. L'optimisation des matériaux et des structures est un des axes de gain. Cela a conduit à l'amélioration des matériaux existants comme le développement de nouveaux alliages métalliques, mais également à la mise en œuvre étendue de matériaux hétérogènes tels que les composites carbone-époxy. Une autre approche de conception plus récente consiste à utiliser des structures sandwichs avec un cœur constitué d'un matériau léger afin de diminuer la masse et de garder une très bonne tenue mécanique. Lorsque l'application le demande, ces structures peuvent aussi combiner d'autres propriétés physiques, notamment acoustiques ou thermiques. Les peaux de ce type de structures peuvent être constituées de matériaux divers tels que des composites stratifiés ou tissés ou des tôles métalliques. Cependant, une connaissance approfondie du comportement complexe de ces structures est indispensable pour leur mise en application fiable dans des structures aéronautiques. Ainsi, les propriétés mécaniques de structures sandwichs ont été étudiées pour une large variété de matériaux constitutifs du cœur, notamment le balsa ou les polymères, et plus particulièrement les matériaux cellulaires tels que les mousses, les empilements de sphères creuses, les nids d'abeille, les tôles gaufrées ou les structures réticulées.

Les matériaux cellulaires sont de bons candidats pour être utilisés comme cœurs de structures sandwichs car leurs propriétés spécifiques (propriétés rapportées à la masse volumique) sont très élevées comme l'illustre le diagramme proposé par Ashby (2013) pour la rigidité en figure 1. Cette carte de la masse volumique par rapport au module d'Young pour divers matériaux permet de comparer des iso-valeurs de rigidités spécifiques. On remarque que les mousses, et plus généralement les matériaux cellulaires architecturés, se trouvent sur la carte parmi les matériaux aux plus hautes rigidités spécifiques.

L'Onera ayant pour vocation la recherche appliquée à l'aéronautique, les matériaux légers font tout naturellement partie de ses thématiques de recherche. Ainsi un matériau cellulaire architecturé a été développé dans le cadre du projet Carnot DynaCell. Proposé par l'Onera, ce projet qui a débuté en janvier 2011 et a duré 42 mois a impliqué le Département des Matériaux et Structures Métalliques et le Département Aéroélasticité et de Dynamique des Structures de l'Onera, ainsi que la société Transvalor des Mines Paritech (commercialisant notamment le code éléments finis Z-set (www.zset-software.com)). Le projet a visé à mettre en place la chaîne complète de caractérisation et de modélisation

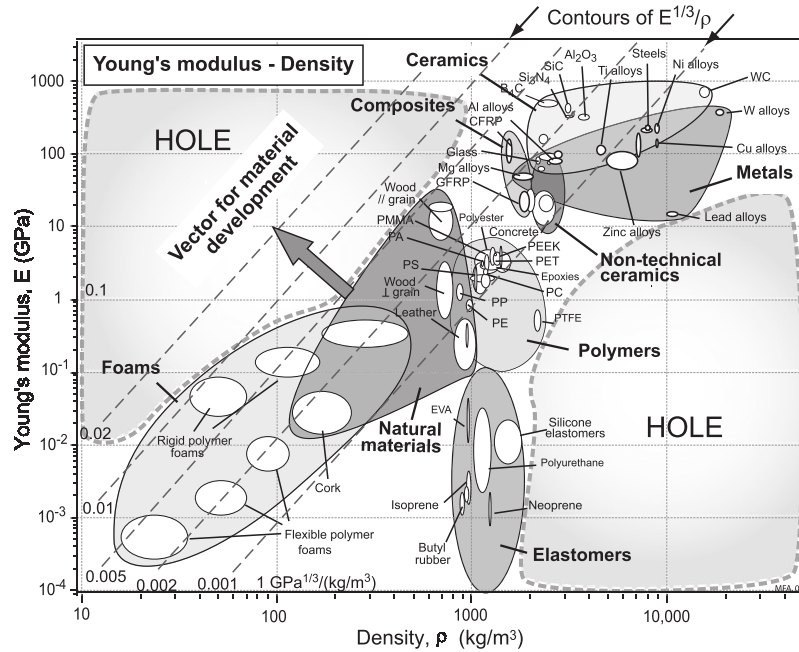


FIG. 1 – Diagramme dans l'espace masse volumique/module de Young des grandes classes de matériaux avec iso-valeurs de rigidités spécifiques ; (Ashby, 2013)

en quasi-statique et en dynamique d'un matériau cellulaire utilisé dans le cœur de structures sandwichs. La problématique industrielle au cœur de ces travaux est l'amélioration des anneaux de blindage de turbines d'hélicoptère. En effet, en cas de rupture d'aube, les débris résultant de la rupture des aubes de turbines doivent être confinés à l'intérieur du moteur. Actuellement, la solution technique retenue consiste en un anneau de métal qui arrête les débris. Dans un objectif de réduction de la masse de cet élément de structure et de sécurité, une rupture technologique est envisagée. Cette structure métallique massive serait remplacée par une structure sandwich avec un cœur en matériau cellulaire. Elle serait d'un encombrement du même ordre de grandeur, mais utiliserait un mécanisme de rétention d'aube différent, basé sur la dissipation de l'énergie mécanique par la déformation plastique du matériau cellulaire. En effet, les matériaux cellulaires peuvent atteindre en compression des déformations très importantes jusqu'à la densification (écrasement complet des cellules sur elles-mêmes). La rétention des débris s'effectuerait donc par dissipation de l'énergie cinétique par déformation plastique du cœur cellulaire. Par ailleurs, cette application implique un fonctionnement à haute température, ce qui a conduit à l'utilisation de matériaux pouvant résister à ces conditions de service. Par conséquent, la structure sandwich complète a été élaborée en Inconel[®] 600, un superalliage base Nickel. Le cœur cellulaire étudié est un empilement de tubes, selon deux motifs, carré (figure 2(a)) et hexagonal (figure 2(b)).

Les membres participant à ce projet se sont concentrés sur plusieurs aspects. Ils ont d'abord étudié les procédés de brasage pour la fabrication d'un matériau cellulaire résistant à de hautes températures. Ensuite, la caractérisation mécanique expérimentale en

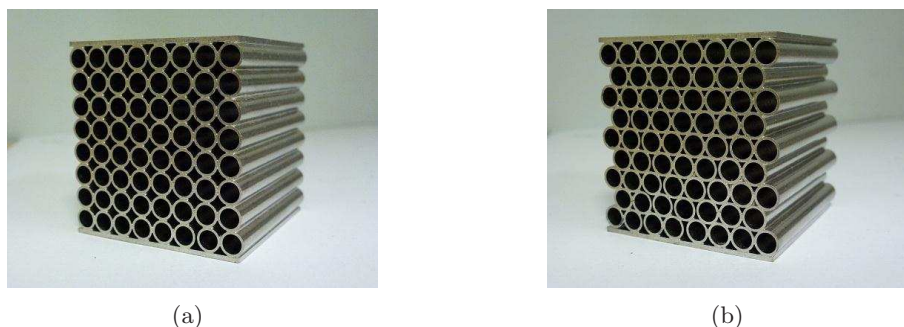


FIG. 2 – Structures sandwichs considérées ; (a) Coeur selon un empilement carré de tubes, (b) et selon un empilement hexagonal.

quasi-statique et en dynamique du matériau constitutif ayant subi les traitements thermiques *in situ* d'élaboration a été menée afin de déterminer le comportement mécanique du matériau cellulaire après fabrication. Puis, une caractérisation microstructurale, avant et après essais mécaniques, a été réalisée afin de relier le comportement mécanique observé aux évolutions microstructurale subies par le matériau constitutif. Ensuite, des essais de compression sur structures sandwichs ont été réalisés en quasi-statique et en dynamique au vérin rapide. Finalement, des outils numériques de simulation ont été développés et ont été utilisés pour la modélisation en quasi-statique et en dynamique de ces structures sandwichs.

Les empilements de tubes brasés selon les motifs hexagonal et carré sont considérés comme un matériau modèle pour le développement des outils de modélisation. En effet, la facilité d'approvisionnement en tubes et la bonne reproductibilité de leurs propriétés géométriques et mécaniques permettent de diminuer la dispersion expérimentale et de se rapprocher des modèles numériques idéalisés. De plus, le fait que les structures soient extrudées permet de les modéliser uniquement en deux dimensions dans un premier temps. Ce qui permet de réduire les coûts de calcul et de mettre plus facilement en place une démarche de modélisation.

Problématique

Les matériaux cellulaires ont été largement étudiés pour leurs nombreuses caractéristiques (Evans *et al.*, 1998). En tant que matériau hétérogène, pour leur élaboration comme pour leur caractérisation, il faut considérer plusieurs échelles comme illustrées à la figure 3 :

- l'échelle macroscopique : c'est l'échelle de la structure, où l'on reconnaît la géométrie de la structure de l'application, on y trouve également les chargements qui lui sont appliqués ;
- l'échelle mésoscopique : c'est l'échelle à laquelle on distingue une structure interne au matériau, distribution, taille et forme des phases ;
- l'échelle microscopique : c'est l'échelle des constituants des différentes phases du

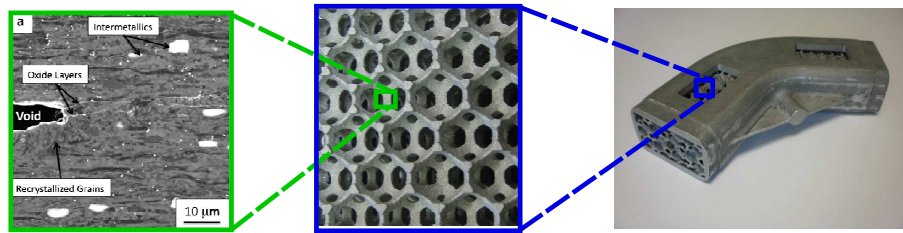


FIG. 3 – Echelles caractéristiques d’une mousse architecturée d’aluminium, microstructure (Dehoff et Babu, 2010), mésostructure et macrostructure (Wikipédia : Mousse métallique, 20/08/14)

matériau hétérogène. Elle peut elle-même être hétérogène.

On retrouve ces échelles pour le matériau modèle étudié. L’échelle macroscopique est celle de la structure sandwich avec les peaux et le cœur. On trouve ensuite l’échelle mésoscopique au niveau de l’empilement de tubes. Et, finalement, l’échelle microscopique se situe au niveau de la microstructure du matériau constitutif.

Des approches multi-échelles d’homogénéisation dans le régime non-linéaire sont utilisées afin de remplacer le matériau cellulaire au sein de la structure par une description continue du matériau. De nombreux travaux se sont concentrés sur la compréhension du comportement des matériaux hétérogènes tels que les polycristaux, les matériaux composites ou les matériaux cellulaires. Mais l’étude de ces matériaux est difficile lorsque le comportement devient non-linéaire. On peut citer l’effet de l’orientation des grains et des joints de grains dans les polycristaux, l’endommagement dans la matrice, les décohésions entre phases et le délaminage dans les composites, ou encore l’influence des non-linéarités du matériau constitutif ou les non-linéarités géométriques dues aux grandes transformations dans le cas des matériaux cellulaires.

L’objectif de ce travail de thèse est de modéliser des structures de grandes dimensions sans modéliser explicitement l’échelle mésoscopique du matériau qui représenterait un fort coût de calcul. En effet, les phases seraient dans ce cas complètement modélisées, nécessitant alors des maillages d’une grande finesse par rapport à la taille de structure modélisée. Le nombre de degrés de libertés serait alors trop grand pour une utilisation en aide à la conception. Des problématiques similaires sur des matériaux aux comportements analogues au matériau modèle étudié ont déjà motivé des travaux de recherche dont trois sont décrits ci-dessous. Ils sont présentés ici car ils ont proposé des méthodes pour caractériser et modéliser par des critères de plasticité des comportements de complexité croissante de matériaux cellulaires.

Tsuda *et al.* (2010) ont utilisé le caractère multi-échelle des tôles gaufrées afin d’étudier le comportement mécanique d’échangeurs thermiques cellulaires. Pour cela, ils ont simulé des chargements multi-axiaux sur la cellule périodique du matériau de l’étude. Ils ont ensuite identifié un modèle de comportement élasto-visco-plastique sur les réponses mécaniques homogénéisées issues des calculs. Les auteurs ont ainsi réussi à modéliser correctement l’anisotropie du comportement mécanique du matériau, ainsi que la compressibilité comme ils le montrent dans le cas d’un chargement hydrostatique. Toutefois, le comportement

n'est bien modélisé que pour des chargements uni-axiaux inférieurs à 5% de déformation macroscopique totale. De plus, ils ont observé que le comportement inélastique prend une forme non-quadratique lors de calculs pilotés avec des conditions limites en déformation macroscopique uniforme. Ils ont néanmoins estimé que l'approximation du comportement inélastique par un modèle quadratique était satisfaisante pour l'amplitude de déformation macroscopique étudiée.

Wang et Pan (2006) ont proposé un modèle qui prend mieux en compte le comportement général d'un matériau cellulaire. Sur la base de résultats d'essais expérimentaux issus de (Deshpande et Fleck, 2001) sur une mousse polymère, un modèle non-quadratique anisotrope a été proposé pour prendre en compte le comportement inélastique du matériau en fonction de la multi-axialité du chargement. De plus, la dissymétrie du comportement inélastique entre un chargement en traction et un chargement en compression a été modélisée par une translation de la surface de charge initiale. Ce critère de plasticité donne une bonne représentation du comportement inélastique multi-axial du matériau. Cependant, le modèle ne rend pas compte de l'évolution de la surface d'écoulement plastique du matériau. En effet, au delà de la limite d'élasticité, les physiques des phénomènes observés en traction et en compression n'ont pas la même origine. Par conséquent, un écrouissage isotrope combiné à ce modèle ne modélise pas le comportement effectif inélastique.

Okumura *et al.* (2004) ont quant à eux étudié le comportement inélastique de nids d'abeille à base hexagonale afin de déterminer les modes d'instabilité qui apparaissent dans ce matériau. Une caractérisation des instabilités à l'échelle mésoscopique ainsi que des instabilités à l'échelle macroscopique a été menée. Les outils ont ensuite permis une étude de l'influence du matériau constitutif sur ces modes d'instabilité. Les auteurs ont également étudié la localisation de la déformation qui se développe dans un agrégat de cellules unitaires périodiques en fonction de la multi-axialité du chargement macroscopique. Cependant l'étude a été menée sur une architecture avec de forts élancements provoquant des instabilités élastiques avant d'observer d'autres instabilités qui n'apparaissent qu'en présence de plasticité dans le matériau constitutif.

Les travaux menés jusqu'à présent permettent de modéliser par une Loi Homogène Equivalente (LHE) un comportement caractérisé inélastique, soit par des calculs sur une cellule unitaire, soit à partir d'essais expérimentaux. En fonction de l'application qui a motivé leurs travaux, les auteurs ont proposé des approches de caractérisation et de modélisation des matériaux cellulaires au sein de structures. En utilisant un modèle comportant peu de paramètres matériaux, Tsuda *et al.* (2010) ont modélisé avec un accord perfectible le seuil de plasticité, mais également l'évolution du comportement élasto-visco-plastique pour de faibles déformations. Par un modèle plus complexe Wang et Pan (2006) ont modélisé le seuil de plasticité multi-axial avec une grande fidélité, mais pas le comportement plastique et son évolution. Par ailleurs, afin de caractériser un matériau en compression dans le cadre d'une approche multi-échelle, Okumura *et al.* (2004) proposent une méthode pour la caractérisation des instabilités.

Ce travail de thèse a consisté à caractériser par une approche multi-échelle le comportement mécanique d'un matériau cellulaire afin de modéliser à l'aide d'un Milieu Homogène Equivalent (MHE) une structure sandwich de grande dimension sous chargements quasi-statiques. La méthode a été appliquée à deux types de matériaux cellulaires modèles : des

empilements de tubes selon deux motifs, carré et hexagonal.

Démarche

La démarche a consisté dans un premier temps à modéliser le matériau cellulaire modèle du cœur au sein des structures sandwichs par la technique de l'homogénéisation périodique afin de caractériser son comportement mécanique. Pour cela la méthode des éléments finis avec des conditions de périodicité a été utilisée afin de modéliser des chargements multi-axiaux macroscopiques sur les Volumes Elémentaires Représentatifs des deux architectures étudiées. L'hypothèse des petites déformations a été utilisée afin de déterminer les réponses mécaniques inélastiques effectives jusqu'à 5% de déformation macroscopique, d'abord pour des chargements uni-axiaux puis pour des chargements multi-axiaux. Sur la base du comportement du matériau observé lors des essais numériques, une LHE a été choisie et identifiée pour représenter le comportement multi-axial complet. La démarche a ensuite consisté à modéliser des structures sandwichs de taille finie pour déterminer l'influence des effets de bords pour des déformations macroscopiques inférieures à 5%. Dans un premier temps, une étude paramétrique sur différentes tailles de structures sandwichs a été réalisée pour déterminer l'influence du nombre de tubes dans la structure sur le comportement macroscopique en compression uniforme et en glissement simple. Ces calculs sur structures entièrement maillées permettent d'établir une base de comparaison pour la stratégie de modélisation par un Milieu Homogène Equivalent (MHE) qui a été appliquée dans un second temps. L'accord entre les modélisations avec MHE et les calculs de référence des structures sandwichs a ainsi été évalué.

La démarche a ensuite consisté à caractériser le matériau cellulaire pour des cas de chargements sévères. Pour cela, l'abandon de l'hypothèse des petites déformations nous a obligés à utiliser le formalisme des grandes déformations afin de prendre en compte les non-linéarités physiques et géométriques. Tout d'abord, l'étude a été ensuite réalisée sur des structures sandwichs soumises à des chargements en compression afin d'analyser les effets de bord et les modes d'instabilité dans une structure de taille finie. Puis, l'étude de la représentativité du volume élémentaire a été menée pour le cas de réponses mécaniques adoucissantes afin de déterminer le comportement effectif du matériau cellulaire. Pour cela, une étude du mode d'instabilité qui se développe dans le matériau a été menée en fonction de la taille du motif périodique de plusieurs cellules unitaires et de la multi-axialité du chargement macroscopique. Ensuite, la formulation d'un modèle phénoménologique est proposée pour rendre compte du comportement des types d'empilement.

Chapitre 1

Etat de l'art

La caractérisation des propriétés mécaniques effectives des matériaux hétérogènes est un problème essentiel pour de nombreuses applications. La compréhension des liens entre les hétérogénéités et le comportement macroscopique permet à la fois de prédire le comportement mécanique d'un matériau mais également de concevoir des matériaux en fonction de l'application visée. Il existe une très grande diversité de matériaux hétérogènes à différentes échelles. Une liste non exhaustive comprend : les bétons, les composites à matrices céramique, métallique ou organique, les maçonneries, les métaux, les matériaux biologiques tels que les os ou les muscles, les sols et matériaux granulaires tels que le sable ou les poudres utilisées en métallurgie des poudres. Des matériaux généralement considérés comme homogènes à l'échelle macroscopique, tels que les métaux, peuvent en service être dans des situations où la microstructure joue un rôle important. Par exemple, la compréhension du comportement plastique macroscopique est ainsi directement liée à la plasticité à l'échelle des grains (Cailletaud *et al.*, 2003). D'autres matériaux qui comportent plusieurs phases non miscibles tels que les composites ont une microstructure facilement identifiable, particulièrement les composites tissés. L'utilisation de matériaux composites unidirectionnels stratifiés ou tissés a fait l'objet de nombreuses études sur l'influence de la mésostructure (taux de fibres, distribution des fibres, motifs de tissage, stratification, etc...) sur le comportement mécanique ainsi que sur les modes de ruine de ces matériaux (Carrere *et al.*, 2004). Lorsqu'une des phases du matériau hétérogène est une phase non solide (souvent de l'air) on parle de matériaux poreux ou de matériaux cellulaires en fonction du taux de porosité. La caractérisation de ces matériaux peut se faire expérimentalement, mais des méthodes de modélisation des matériaux hétérogènes permettent une plus grande flexibilité. Cependant, il faut prendre en compte les caractéristiques de géométrie et de distribution des phases ainsi que les phénomènes physiques en jeu.

Dans un premier temps, les travaux de la littérature sur la caractérisation du comportement mécanique de matériaux cellulaires sont présentés. Par diverses méthodes, les paramètres architecturaux et matériaux qui gouvernent le comportement et les propriétés mécaniques effectives des matériaux cellulaires ont été étudiés. Ainsi, sont présentés : les effets de l'architecture, l'influence du caractère aléatoire et de la présence de défauts dans un matériau cellulaire, les effets de tailles caractéristiques, du matériau constitutif et finalement les effets de structure qui existent dans les matériaux cellulaires. Dans un second

temps, les techniques de modélisation des matériaux cellulaires sont présentées lorsque l'architecture est modélisée complètement à l'échelle mésoscopique. Dans un troisième temps, les méthodes multi-échelles qui permettent la détermination ou l'estimation des propriétés mécaniques de matériaux hétérogènes sont introduites.

1.1 Les matériaux cellulaires

L'étude des matériaux cellulaires combine la complexité de l'étude d'un matériau classique et la complexité de l'étude d'une structure. Cette dualité est la base de nombreuses études sur les principaux paramètres gouvernant le comportement des matériaux cellulaires. Ce travail bibliographique est important afin de connaître d'abord les particularités du comportement inélastique des matériaux cellulaires, puis d'établir des tendances communes entre toutes les architectures étudiées par les auteurs. En effet, la diversité des matériaux qui les constituent, et la variété des architectures possibles conduisent à autant de comportements effectifs différents. Les lecteurs peuvent donc trouver ici des travaux qui peuvent être appliqués à l'étude du matériau modèle de ce travail de thèse.

1.1.1 Effets de l'architecture sur le comportement macroscopique

Certains matériaux cellulaires sont construits selon une architecture mésoscopique régulière. En fonction du procédé de fabrication choisi, il est possible de construire une très grande variété de morphologies. En s'intéressant uniquement à l'architecture du matériau cellulaire périodique, le comportement macroscopique et sa dépendance aux paramètres géométriques mésoscopiques a été étudié. Les empilements de sphère creuses ont notamment été étudiés par Sanders et Gibson (2003a,b) en modélisant par éléments finis des cellules unitaires de différents types d'empilements en 3D. Le comportement élastique et inélastique a été caractérisé en fonction du motif de l'empilement des sphères : cubique simple, cubique à face centrée ou cubique centré. Les auteurs concluent sur une rigidité et une raideur plus élevées dans la majorité des cas de chargement de l'empilement cubique à face centrée. De plus, la forme de la surface de seuil de plasticité des empilements est soit quadratique soit non-quadratique pour des chargements bi-axiaux comme multi-axiaux. Marcadon et Feyel (2009) ont étudié des cellules unitaires d'empilements 3D de sphères creuses en grandes déformations grâce à un modèle volumique permettant l'analyse des lieux de localisation de la déformation plastique gouvernant le comportement inélastique macroscopique. Une étude paramétrique a été réalisée par les auteurs afin de déterminer l'influence du rapport entre rayon de sphère et épaisseur de paroi sur l'effondrement des cellules sur elles-mêmes. Plusieurs architectures régulières et périodiques ont été caractérisées en 2D par Wang et McDowell (2005). Ils se sont intéressés à des architectures de densités relatives élevées pour privilégier l'allongement et la flexion des liens à l'échelle mésoscopique. En effet, les auteurs affirment que les architectures de faible densité relative sont sujettes principalement au flambement lorsqu'elles sont soumises à des chargements en compression. Les auteurs ont déterminé en fonction de la géométrie des cellules unitaires les seuils de plasticité pour des chargements multi-axiaux. Ils ont été représentées dans l'espace des contraintes principales par des surfaces de charge initiales. Les nids d'abeille

étudiés se caractérisent par des formes de surfaces de charge fermées et non-quadratiques. Les nids d'abeille peuvent également être auxétiques en fonction de l'architecture mésoscopique choisie. Ces matériaux architecturés, par le seul effet de l'architecture, ont des coefficients de Poisson négatifs dans leur régime élastique et des déformations plastiques transverses donnant des coefficients de Poisson plastiques négatifs. Ils ont pour application des structures sandwichs à forte rigidité en flexion grâce à leur important module de cisaillement. Dirrenberger *et al.* (2011) ont étudié par homogénéisation périodique numériquement diverses architectures auxétiques en élasticité, notamment pour quantifier les coefficients de Poisson anisotrope en fonction de l'orientation de la géométrie.

1.1.2 Architectures aléatoires et influence des défauts

Les mousses sont des structures aléatoires à l'échelle mésoscopique à cause de leur procédé de fabrication qui ne permet pas un contrôle strict des tailles et de la distribution des cellules au sein de la mousse. Ces matériaux ont d'abord été modélisés comme des structures régulières par une idéalisation de la structure par un milieu périodique (Gibson *et al.*, 1982). Les mousses ouvertes peuvent être représentées comme une structure de nœuds et de liens à fort élancement comme observé par tomographie par rayons X par Burteau *et al.* (2012). Des auteurs ont étudié les mousses en construisant des modèles constitués d'un treillis de poutres simples suivant un pavage de cellules de Voronoi (Fazekas *et al.*, 2002; Ajdari *et al.*, 2008) et de poutres plus représentatives des cinématiques des liens dans la mousse (Mangipudi et Onck, 2011). Cette méthode permet d'introduire plusieurs paramètres représentatifs du caractère aléatoire de la structure afin d'en observer l'influence. Fazekas *et al.* (2002) ont alors étudié des mousses afin de déterminer l'influence du désordre, de la distribution aléatoire de taille des cellules et de la présence de défauts. Mangipudi et Onck (2011) ont étudié plusieurs autres paramètres en quantifiant le désordre, par une anisotropie des orientations des cellules ou par l'étude de la localisation dans les cellules de grandes tailles. Il en ressort que le paramètre principal est la densité relative de la mousse et que la distribution aléatoire croissante implique une forte augmentation de la ductilité de la structure, mais n'a que peu d'influence sur la contrainte maximale avant adoucissement de la structure par endommagement de la mésostructure. Bastawros *et al.* (2000) ont étudié l'inhomogénéité du comportement inélastique de mousses d'aluminium par la technique de la corrélation d'images. Ainsi, les différents comportements macroscopiques observés lors d'essais sous chargements uni-axiaux en compression ont été reliés aux phénomènes à l'échelle mésoscopique. Au delà du comportement élastique, le comportement durcissant est suivi d'un adoucissement dû à l'effondrement des cellules sur elles-mêmes puis la densification de la mousse se fait par bandes successives lorsque les cellules se referment et viennent en contact. Les auteurs ont observé également que, lors de l'apparition des bandes de localisation de la déformation, les cellules autour de la bande sont également déformées sur une longueur de l'ordre de quelques cellules. Les auteurs considèrent que cette taille caractéristique est la limite de validité de l'hypothèse d'un milieu continu. Les matériaux à mésostructure régulière peuvent présenter des défauts. Marcadon et Kruch (2013) ont étudié le cas des sphères creuses. Des calculs éléments finis ont été menés sur des cellules unitaires présentant une distribution des paramètres géo-

métriques tels que l'épaisseur des parois, la taille de ménisques de brasure ou l'absence de sphères, afin de déterminer leur influence sur la rigidité et sur le comportement plastique macroscopique. Ils concluent sur une forte influence de la distribution des épaisseurs de parois des sphères creuses sur le comportement macroscopique, et une faible influence des tailles de ménisque bien que la déformation plastique y soit principalement localisée.

1.1.3 Effet de taille de l'architecture mésoscopique

Le ratio entre la taille des échantillons étudiés et la taille caractéristique des cellules mésoscopiques permet de quantifier les effets de bords et l'influence des chargements locaux sur le comportement mécanique effectif de matériaux cellulaires. Onck *et al.* (Onck *et al.*, 2001; Mangipudi et Onck, 2011) ont beaucoup travaillé sur la question des effets de taille. Ils ont modélisé des échantillons, de ratio entre largeur d'échantillon et taille de cellule variable, à hauteur constante afin d'étudier l'influence des effets de bord en fonction de la taille de l'architecture à l'échelle de la mésostructure. Ils ont observé que la réponse mécanique est d'abord constante lorsque la largeur des échantillons diminue puis finalement chute rapidement lorsque les effets de bords deviennent dominants pour de faibles largeurs d'échantillon. Ils interprètent ces résultats par la présence d'une zone sur le bord, de taille liée à la taille caractéristique de l'architecture, où la contrainte effective diminue graduellement. Elle passe alors d'une valeur de contrainte nominale à une contrainte nulle au bord. Lorsque la taille de l'échantillon est de l'ordre de grandeur de deux longueurs caractéristiques, la réponse mécanique ne dépasse pas la contrainte nominale dans la partie centrale d'un échantillon de grande taille. En revanche, Lhuissier *et al.* (2009) n'ont pas observé ce comportement pour des sphères creuses. Andrews *et al.* (2001) ont étudié l'effet de taille de mousses et sont arrivés aux mêmes conclusions que les travaux de (Onck *et al.*, 2001; Mangipudi et Onck, 2011). Ils ont également montré l'influence de la taille caractéristique des cellules dans le cas de l'indentation d'une mousse. Dans le cadre de travaux de modélisation multi-échelle de nids d'abeille indentés, Asada *et al.* (2009) ont aussi étudié l'effet de taille dans un but de vérifier la validité de l'hypothèse de la séparation des échelles.

1.1.4 Rôle du matériau constitutif

L'architecture des matériaux cellulaires a une influence très marquée sur le comportement macroscopique. Cependant, le matériau constitutif de la phase solide joue un rôle très important sur le comportement des matériaux cellulaires. L'élasticité a été étudiée grâce à la théorie de l'homogénéisation qui permet un accès fiable aux propriétés effectives d'un matériau. Néanmoins, lorsque des non-linéarités géométriques ou des non-linéarités physiques telles que de la plasticité apparaissent, le comportement effectif devient inélastique. Les effets de chacune de ces non-linéarités sont difficiles à distinguer lorsqu'ils apparaissent simultanément dans un matériau. Une étude paramétrique sur l'influence du module d'écrouissage a été réalisée par Marcadon et Feyel (2009) sur des modèles de cellules unitaires d'empilements de sphères creuses. Ils en concluent que pour certains motifs d'empilement, le matériau constitutif peut avoir un effet du même ordre de grandeur que les paramètres géométriques sur le comportement effectif du matériau. Dirrenberger

(2012) a également étudié l'influence de l'augmentation du module d'écroutissage du matériau constitutif dans le cas des matériaux auxétiques dans le régime non-linéaire. Il observe une forte diminution du coefficient de Poisson plastique macroscopique. Des auteurs ont étudié l'influence de l'endommagement qui peut se développer dans le matériau constitutif dans la phase solide (Takahashi *et al.*, 2010; Mangipudi et Onck, 2011; Marcadon et Kruch, 2011). Des flambements locaux sont observés par Takahashi *et al.* (2010) lorsque le matériau est adoucissant. Des calculs de cellules périodiques, ont montré que les modes d'instabilités qui apparaissent avec un matériau constitutif adoucissant sont différents des modes observés avec un matériau constitutif durcissant. Mangipudi et Onck (2011) ont investigué le lien qui existe entre les phénomènes observés sur la réponse macroscopique et les endommagements locaux observés dans l'architecture sur les cartographies de calculs éléments finis sur des mousses aléatoires. Caty *et al.* (2008) ont montré par tomographie par rayons X sur des empilements de sphères creuses qu'il existe des pores dans les parois, montrant ainsi la présence d'hétérogénéités à l'échelle microscopique qui influent sur le comportement du matériau constitutif. Ainsi, Fritzen *et al.* (2012, 2013) ont étudié cette double échelle d'hétérogénéité qui peut exister dans un matériau. Ainsi sur un Volume Élémentaire Représentatif (VER) d'une matrice avec des pores, les auteurs ont utilisé un modèle de matériau constitutif compressible dans la matrice afin de modéliser le comportement d'une matrice poreuse. En réalisant un très grand nombre de calculs éléments finis sur le VER, ils ont reconstitué son comportement macroscopique multi-axial, notamment le comportement compressible effectif du VER. Ils ont observé une influence importante des porosités aux deux échelles (microscopique par le modèle de comportement de la matrice et mésoscopique par l'architecture du VER). Le matériau constitutif peut également être dépendant de la vitesse de déformation. Les faibles vitesses de déformation ont été étudiées dans le cadre du fluage (Andrews *et al.*, 1999; Tsuda *et al.*, 2010) et les vitesses de déformation importantes ont été étudiées dans le cadre de chargements en dynamique rapide (Papka et Kyriakides, 1999b,a). Les auteurs ont observé dans les deux cas avec des matériaux élasto-visco-plastiques comme pour des matériaux visco-élastiques que la dépendance à la vitesse de déformation est également présente à l'échelle macroscopique.

1.1.5 Instabilités et effets de structure

Lors de chargements sévères, certains matériaux cellulaires développent des instabilités, notamment lorsqu'ils sont soumis à des compressions. Ces instabilités ont notamment pour origine des flambements au sein l'architecture, ayant souvent un importement élanement, à l'échelle mésoscopique. Ces instabilités se traduisent par des bandes localisation de la déformation et par un adoucissement du comportement effectif du matériau (Silva et Gibson, 1997; Guo et Gibson, 1999). Dans les travaux concernant la caractérisation expérimentale du comportement de nids d'abeille à base de tubes (Papka et Kyriakides, 1999b), les auteurs ont observé les modes d'instabilités apparaissant dans ce type d'architecture pour des chargements bi-axiaux à des vitesses de déformation variables. Papka et Kyriakides (1999a) se sont alors intéressés à la modélisation par éléments finis de ces structures de taille finie soumises à des chargements en compression. Le fort élanement et l'élasticité des parois de la structure ont permis une modélisation à l'aide d'éléments

poutres. Ils ont ainsi reproduit les motifs des instabilités et les réponses mécaniques observés expérimentalement. Ohno *et al.* (Ohno *et al.*, 2002, 2004) se sont intéressés à des nids d’abeille à base hexagonale. Ils ont ainsi caractérisé en élasticité les modes macroscopique et mésoscopique d’instabilité qui se développent dans des cellules périodiques 2D à fort élanement. La méthode a été étendue par Okumura *et al.* (2008) dans le cas 3D en modélisant des mousses à cellules ouvertes. Les auteurs ont également appliqué l’approche pour l’étude des nids d’abeille 2D hexagonaux ayant un matériau constitutif élasto-plastique dans les parois de l’architecture (Okumura *et al.*, 2004). Ils ont ainsi observé l’apparition de modes d’instabilité présents uniquement dans le cas d’un matériau constitutif élasto-plastique. Une étude paramétrique a été réalisée pour déterminer la taille de l’agrégat de cellules unitaires nécessaire pour converger vers un mode d’instabilité supposé avoir le plus bas niveau d’énergie. Saiki *et al.* (2002) se sont intéressés à la taille des cellules périodiques qu’il est nécessaire d’utiliser pour étudier les modes d’instabilité d’une structure périodique. Ils proposent une analyse numérique par éléments finis permettant de choisir le nombre de fois que la cellule unitaire doit être répétée dans le calcul périodique. En effet, les auteurs ont observé que la taille de la structure périodique doit être supérieure à la longueur d’onde de l’instabilité qui a la plus faible énergie de déformation afin de modéliser l’ensemble des modes qui peuvent se développer dans le matériau.

1.2 Modélisation des architectures cellulaires

La compréhension approfondie des phénomènes qui permettent le dimensionnement de structures intégrant des matériaux cellulaires est indispensable. De plus, les nombreux degrés de liberté de conception de matériaux cellulaires sont autant d’axes d’études et d’optimisation, il faut donc développer des outils de caractérisation pour permettre leur mise en œuvre. L’approche directe pour modéliser un matériau cellulaire consiste à modéliser le matériau comme une structure. Il s’agit de considérer les géométries, la distribution et les propriétés mécaniques des phases de manière complète dans un modèle. Un modèle simple a été proposé par Silva *et al.* (1995), basé sur une représentation idéalisée des nids d’abeille aléatoires non-périodiques par des structures constituées de cellules de Voronoi. Ainsi, par un modèle éléments finis de poutres interconnectées, les auteurs ont étudié l’influence de la densité et de la distribution des cellules de Voronoi sur le comportement élastique. Mangipudi et Onck (2011) ont proposé un modèle de poutres modélisant la géométrie des liens entre les nœuds dans les mousses ouvertes par des poutres à section variable et un modèle de matériau prenant en compte l’endommagement du matériau constitutif. Ils ont alors modélisé des mousses aléatoires avec des modèles construits à l’aide de cellules de Voronoi. Une étude paramétrique complète a été réalisée et a permis de déterminer les effets sur le comportement effectif de la variation de plusieurs paramètres caractéristiques d’une structure de type mousse. Ils se sont concentrés sur les effets de la densité relative du matériau cellulaire, de la distribution des tailles de cellule, le comportement du matériau constitutif (ayant subi un traitement thermique). Les effets de bord, de taille et de l’orientation préférentielle des poutres induisant une anisotropie ont aussi été analysés. Ils ont aussi construit un diagramme présentant les évolutions du comportement effectif en termes de la rigidité et de la raideur en fonction de chacun de ces paramètres. Burteau

et al. (2012) ont proposé un modèle éléments finis volumique sur la base de la structure reconstituée d'un échantillon de mousse de nickel ouverte par tomographie par rayons X. Les auteurs ont cherché à calculer la plus grande structure possible mais ont été limitée par la taille de l'échantillon analysé par tomographie ainsi que par la taille du modèle éléments finis. A l'aide de la méthode des éléments finis et du calcul parallèle, ils ont réalisé des calculs avec un comportement de matériau constitutif hyperélastique pour la mousse de polyuréthane et un comportement élasto-plastique isotrope pour la mousse de nickel. Les résultats expérimentaux obtenus par tomographie aux rayons X *in situ* sur l'échantillon ont ensuite été comparés au calcul éléments finis avec un accord des réponses mécaniques tant macroscopiquement que sur les déformées à l'échelle mésoscopique. Un modèle volumique a permis aux auteurs d'observer les champs de contraintes au sein de la structure à l'échelle mésoscopique. Face au problème de la taille du calcul Caty *et al.* (2008) ont choisi de modéliser les empilements de sphères creuses à l'aide d'éléments coques, l'épaisseur des sphères étant considérée comme très inférieure rapport aux autres dimensions de la méso-structure. Les auteurs ont construit le modèle éléments finis à partir de l'analyse d'images obtenues par tomographie aux rayons X de la géométrie réelle de l'empilement. Une telle approche tient compte du caractère aléatoire des empilements et de l'irrégularité géométrique des sphères. Les auteurs ont également effectué la validation du modèle coques par une étude de la convergence géométrique entre des maillages volumiques et coques sur les géométries des sphères creuses.

1.3 Méthodes de modélisation multi-échelle

Les travaux qui sont présentés ici s'intéressent à la transition entre deux échelles, particulièrement le passage de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique. La difficulté de modéliser les matériaux hétérogènes par des modèles complets a mené au développement de méthodes mathématiques et numériques visant à estimer les propriétés effectives d'un matériau à partir de toutes les informations à l'échelle mésoscopique. Le matériau hétérogène n'est alors plus étudié dans son ensemble, mais au travers d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER). Le choix de ce VER a fait l'objet de nombreux travaux, notamment sur la taille et le nombre d'hétérogénéités qui doivent être présentes dans ce volume pour qu'il soit statistiquement représentatif d'un comportement effectif. Ostoja-Starzewski (2006) a étudié la convergence du comportement macroscopique vers le comportement effectif de mousses aléatoires en fonction de la taille du VER et des conditions limites appliquées aux bords (déformations uniformes, vecteurs tractions uniformes ou périodicité). Une estimation classique recommande une taille de VER inférieure à la taille caractéristique de la sollicitation mais plus grande que la taille des hétérogénéités que le VER contient. Ces conditions sont par exemple respectées par la cellule unitaire d'un milieu périodique soumis à un chargement uniforme. En contre-partie, un milieu aléatoire avec une distribution très non-uniforme des hétérogénéités a besoin d'un VER de grandes dimensions afin d'inclure dans ce VER tous les types d'hétérogénéités qui influent sur le comportement macroscopique.

Une description générale des méthodes de modélisation multi-échelle proposées par les auteurs est donnée ici. Les lecteurs sont invités à se référer aux travaux de revue de Kanouté

et al. (2009) qui fournissent des exemples d'applications ainsi que la description détaillée de plusieurs approches pour la modélisation multi-échelle de matériaux composites.

1.3.1 Calculs du comportement effectif du Volume Élémentaire Représentatif d'un matériau cellulaire

Un VER contient les informations essentielles de l'échelle mésoscopique, l'analyse fine de son comportement mécanique permet la mise en place d'un calcul de structure macroscopique. Afin d'estimer les propriétés élastiques et inélastique du VER, Plusieurs niveaux d'analyse peuvent être appliqués à un VER en prenant en compte les taux volumiques des phases, leur taille et leur distribution déterminant leur interaction. Cependant, l'application de ces méthodes d'estimation du comportement mécanique macroscopique aux matériaux cellulaires présente des difficultés à cause de la phase de vide étant dominante. Les approches à champ moyen basées sur l'utilisation du tenseur d'Eshelby pour résoudre le problème d'une inclusion dans une matrice infinie soumise à un champ mécanique macroscopique induit une réponse souvent trop raide par rapport aux observations expérimentales quand elles sont appliquées à des problèmes fortement non-linéaires. Ceci s'explique par le fait moyenner les champs et de masquer ainsi les gradient présents dans la mésostructure. Afin de contourner ce problème, une méthode dénommée *Transformation Field Analysis* (TFA) proposée par Dvorak (1992) consiste à décomposer le VER en plusieurs sous-volumes et à introduire l'influence des déformations libres de contrainte (les eigenstrain), présentes dans certains sous-volumes, dans les relations de localisation des déformations ou des contraintes. Le découpage est très dépendant du degré de non-linéarité des matériaux présents, ce qui conditionne aussi la résolution du problème. Ainsi pour un comportement proche d'une plasticité parfaite, il est nécessaire de discrétiser très finement le VER en sous-volumes, conduisant ainsi à une résolution très coûteuse en temps de calcul. Si ce découpage n'est pas suffisant alors la réponse macroscopique obtenue est trop raide et des corrections doivent être apportées au formalisme (Chaboche *et al.*, 2001; Carrère *et al.*, 2002). Pour palier cette limitation, Michel et Suquet (2003) ont proposé une variante dénommée *Nonuniform Transformation Field Analysis* (NTFA), qui consiste à ne découper la cellule élémentaire qu'en deux sous-volumes, un pour l'inclusion et un pour la matrice mais avec un champ non-uniforme de l'eigenstrain défini au travers de fonctions de forme. La construction de ces fonctions se fait au début du calcul, elle peuvent ne plus être modifiées ou être mises à jours si le trajet de chargement n'est plus représentatif des bases initiales. Cette approche est prometteuse et est en constante évolution. Elle est appliquée aujourd'hui à la résolution d'une large gamme de problème (Fritzen et Böhlke, 2011; Largenton *et al.*, 2011). Une autre approche basée sur les transformées de Fourier permettant le calcul de microstructures sur une cellule périodique qui peut englober un grand nombre d'hétérogénéités a été proposée par Moulinec et Suquet (1998). La méthode utilisant une discrétisation de l'espace en voxels, ainsi à partir d'une analyse d'images une cellule périodique peut ainsi être directement formée. Les hétérogénéités à l'échelle mésoscopique de formes complexes peuvent alors facilement être modélisées. Sur l'aspect numérique, la méthode n'appelle pas d'inversion de matrice de rigidité, mais demande une grande capacité de mémoire. Le nombre d'itérations ou la non convergence de la méthode

est directement lié au contraste de rigidité entre les phases de la microstructure (Moulinet et Suquet, 2003). Pour les matériaux ayant un contraste de propriétés de phase très important, la méthode s'applique aux matériaux cellulaires à l'aide des développements proposés par Michel *et al.* (2000, 2001).

1.3.2 Méthodes multi-échelles numériques intégrées de calcul de structures

Un modèle numérique peut parfois être nécessaire si on souhaite obtenir les champs locaux à l'échelle mésoscopique d'architectures à géométries et matériaux constitutif complexes. On trouve de nombreux travaux dans la littérature où a été appliquée la méthode de la cellule unitaire consistant à appliquer un champ macroscopique sur une géométrie périodique (Christman *et al.*, 1989; Tvergaard, 1990). Ces travaux montrent la possibilité de remonter aux informations aux deux échelles, mésoscopique au niveau de la cellule unitaire avec la forme des champs locaux et macroscopique avec le comportement effectif. Des approches numériques intégrées à deux échelles ont été utilisées dans la littérature, Ghosh *et al.* (1996) se sont servi des éléments finis de Voronoi, Michel *et al.* (1999) ont appliqué la méthode FFT, et d'autres auteurs ont utilisé les éléments finis classiques à deux échelles dans (Smit *et al.*, 1998; Kouznetsova *et al.*, 2001; Feyel et Chaboche, 2000; Asada et Ohno, 2007). Les méthodes multi-échelles numériques pour le calcul de structure permettent de ne faire aucune hypothèse a priori sur le comportement mécanique homogénéisé. Ainsi, des chargements complexes issus de l'équilibre macroscopique aux points d'intégration des éléments sont appliqués sur des microstructures représentatives. Les non-linéarités physiques et géométriques sont également prises en compte à l'échelle mésoscopique en fonction du formalisme choisi. Cependant, un calcul à plusieurs échelles a un coût élevé en termes de mémoire et de temps ; Feyel et Chaboche (2000) ont notamment appliqué le calcul parallèle à l'échelle macroscopique pour passer outre cette limitation. L'approche à plusieurs échelles est néanmoins pertinente pour la validation de modèles de comportement de matériaux hétérogènes. Dans certaines applications, l'hypothèse de séparation des échelles n'est plus vérifiée ; Une utilisation sélective de la modélisation multi-échelle et de la modélisation de la géométrie explicite a été proposée par Ghosh *et al.* (2001) pour des structures avec des zones à forts gradients, comme une concentration de contrainte due à la géométrie. Dans le cas de la présence de forts gradients de la déformation existe à l'échelle macroscopique avec une longueur caractéristique de l'ordre de grandeur de la taille de l'hétérogénéité à l'échelle de la mésostructure, la fluctuation des champs mésoscopique ne donne alors plus une moyenne constante à travers le VER. Des modes de déformation inhomogène se développent alors dans le VER. Une approche de modélisation multi-échelle intégrée pour des milieux continus généralisés a été proposée par Kouznetsova *et al.* (2002) avec le second gradient du déplacement et, sur la base des travaux de Forest et Sab (1998), avec un milieu de Cosserat par Feyel (2003). La méthode permet alors de calculer la réponse mécaniques du VER pour des chargements généralisés tels que des déformations macroscopiques non-homogènes à travers le VER ou des déformations polaires. Une longueur interne est introduite par ce type de formalisme, cela permet de mieux prendre en compte les effets de taille de la mésostructure mais également de régulariser la dépendance au

maillage du calcul à l'échelle macroscopique.

1.3.3 Lois Homogènes Equivalentes

L'approche multi-échelle séquentielle consiste à identifier une Loi Homogène Equivalente (LHE) sur le comportement macroscopique du matériau cellulaire. Une structure macroscopique intégrant un matériau cellulaire peut alors être modélisée en remplaçant l'architecture cellulaire par un Milieu Homogène Equivalent (MHE) afin de réduire le temps de calcul. Des lois de comportement particulières aux matériaux à faible densité relative ont été développées afin de prendre en compte les différents comportements mécaniques observés lors de caractérisation expérimentale ou par calcul.

Green (1972) a développé un modèle de plasticité pour les solides avec présence de nombreuses fissures ou de vides. Ce critère ne modélise qu'un comportement isotrope, par exemple dans le cas d'une distribution de vides aléatoire. Le critère de plasticité proposé est une fonction de deux composantes : le deuxième invariant du déviateur des contraintes, comme c'est le cas dans le critère de von Mises, et le premier invariant des contraintes qui est la trace du tenseur et qui quantifie la pression hydrostatique. Ainsi, le terme de trace dans le critère permet de prendre en compte le comportement plastique sous chargement hydrostatique, un comportement que l'on ne retrouve généralement pas dans les matériaux massifs. Deshpande et Fleck (2000) ont appliqué et identifié, à partir de résultats expérimentaux, un modèle de type Green pour des mousses isotropes. Ils ont également proposé une formulation de l'écrouissage différenciant l'action sur l'écrouissage des composantes sphérique et déviatorique de la contrainte. Combaz *et al.* (2010) ont pour leur part étudié des mousses polymères avec une machine de traction tri-axiale. Ils ont ainsi proposé un critère de type Green fonction en plus du troisième invariant des contraintes qui reproduit la forme dissymétrique des surfaces de charges dans l'espace des contraintes. Badiche *et al.* (2000) ont proposé une forme du modèle de Green anisotrope, avec une composante anisotrope de forme quadratique proposée par Hill (1948) pour la contrainte équivalente, et une modification du terme de contrainte hydrostatique pour prendre en compte l'anisotropie du comportement plastique compressible. Cette formulation a été également utilisée par Xue et Hutchinson (2004) pour la modélisation de structures sandwichs. Tsuda *et al.* (2010) se sont intéressés à la modélisation de tôles gaufrées pour échangeurs thermiques. Les auteurs utilisent une forme du critère de Hill formulé sur les composantes du tenseur des contraintes. Ainsi ils modélisent par ce critère anisotrope compressible, avec un faible nombre de paramètres matériaux, le comportement inélastique homogénéisé calculé par éléments finis sur la cellule unitaire de l'architecture. Afin de modéliser la mise en forme de structures sandwichs à cœurs formés de tôles gaufrées, Besse et Mohr (2012) ont modélisé différents cas de chargement sur cellule unitaire. Ils ont ensuite proposé un critère à deux potentiels de type Hill liés par l'évolution du travail plastique. Ils ont ainsi modélisé par un potentiel le comportement à écrouissage isotrope observé pour de faibles déformations puis par un autre la distorsion de la surface d'écoulement provoquée par le changement de géométrie pour des déformations plus importantes. Dillard *et al.* (2006) ont étudié les déformations autour d'un trou dans une mousse en utilisant un milieu continu généralisé. Ils ont ainsi proposé une loi de comportement macroscopique sur la base de celle proposée

par Badiche *et al.* (2000) mais combinée à un milieu micromorphe élastique. Ils ont ensuite modélisé par un MHE les champs hétérogènes à fort gradient macroscopique autour du trou ou en pointe de fissure. Ce modèle leur permet de régulariser la dépendance au maillage et également de rendre compte des effets de taille. En effet, ils ont remarqué que les concentrations de contraintes, dans un MHE micromorphe, autour d'un trou dans une mousse disparaissent lorsque le trou atteint la taille caractéristique des cellules. Sanders et Gibson (2003a) ont étudié le seuil de plasticité de différents types d'empilement de sphères creuses. Ils ont ainsi observé un comportement multi-axial inélastique quadratique pour l'empilement cubique à faces centrées, mais un comportement inélastique non-quadratique pour les empilements cubique simple et cubique centré. Le matériau constitutif des parois de l'architecture était isotrope; l'anisotropie et la forme non-quadratique observées résultaient donc des effets de l'architecture. Les auteurs ont ensuite identifié un critère quadratique de type Green. L'anisotropie est bien capturée, et le modèle à une bonne représentation du comportement inélastique multi-axial pour le motif cubique faces centrée qui est quadratique. Cependant, l'accord n'est pas satisfaisant entre le modèle et les comportements non-quadratiques observés pour les deux autres empilements, mais aucune voie d'amélioration n'est proposée. Tsuda *et al.* (2010) ont abouti aux mêmes observations mais ont estimé que le comportement non-quadratique de l'architecture qu'ils ont étudié peut être approché avec une erreur faible par un critère quadratique de type Hill. Par ailleurs, les matériaux cellulaires à faible densité relative ont un comportement plastique différent entre la traction et la compression comme observé expérimentalement par Deshpande et Fleck (2001) sur des mousses de polymère. En effet, les grandes transformations en jeu dans l'architecture peuvent être différentes entre des chargements en traction et en compression et peuvent avoir un effet important sur le comportement effectif. Les auteurs ont donc utilisé un seuil de contrainte maximal en compression bi-axiale afin de modéliser la limite de contrainte à laquelle peut résister l'architecture à l'échelle mésoscopique avant de flamber. Ils ont combiné de seuil en contrainte de flambement au modèle quadratique proposé par Deshpande et Fleck (2000) afin de modéliser les réponses mécaniques observées lors des essais expérimentaux en traction et en compression. Wang et Pan (2006) ont proposé un modèle non quadratique de la forme de ceux proposés par (Barlat *et al.*, 1991; Karafillis et Boyce, 1993; Bron et Besson, 2004) et formulés sur les composantes du tenseur des contraintes modifiées. Ils modélisent la dissymétrie traction/compression par une translation, égale dans toutes les directions ou orthotrope, de la surface de charge non-quadratique. Les auteurs ont utilisé les résultats expérimentaux de Deshpande et Fleck (2001) afin d'identifier les paramètres du modèle et ont modélisé avec succès le comportement inélastique multi-axial. Le critère proposé utilise un paramètre de puissance qui gouverne la forme de la surface de charge. Mais le critère proposé n'utilise qu'un seul paramètre matériau par direction de chargement pour modéliser l'anisotropie de la compressibilité et l'anisotropie observée sous chargements uni-axiaux.

1.4 Conclusion

L'étude des matériaux cellulaires revient à s'intéresser à plusieurs échelles. La réponse mécanique du matériau est fortement dépendante de l'architecture et du comportement

mécanique de la phase solide. En outre, on sait que le matériau constitutif peut lui-même être architecturé ou plus généralement être hétérogène. Ainsi, l'étude du comportement mécanique de divers matériaux cellulaires a donc fait l'objet de nombreux travaux afin de déterminer quelles sont les paramètres qui gouvernent le comportement effectif de ces matériaux cellulaires. La dépendance du comportement macroscopique inélastique par rapport à la géométrie de l'architecture et au matériau constitutif a donc été étudiée. L'anisotropie ainsi que la forme du seuil de plasticité pour des chargements multi-axiaux est une caractéristique directement liée à l'architecture. Les effets de tailles observés entre la taille caractéristique et la taille de la structure macroscopique sollicitée dépendent également de l'architecture, notamment de sa régularité. Les instabilités qui se développent au niveau de l'échelle mésoscopique, particulièrement en compression sont également en lien direct avec l'architecture, mais le comportement du matériau constitutif peut en déterminer le seuil et la forme. Le matériau modèle étudié dans ce travail de thèse est similaire sur plusieurs points à certains travaux de la littérature ; Par conséquent, l'étude de son comportement macroscopique nécessite des outils de modélisation. Une première approche consiste à modéliser la structure à l'échelle mésoscopique entièrement. Malgré le coût de calcul qui devient prohibitif pour des structures de grande taille, elle permet de réaliser des calculs de référence qui peuvent éventuellement servir de base de comparaison à d'autres méthodes de modélisation. D'autres approches de modélisation ont été proposées pour déterminer le comportement effectif d'un matériau hétérogène, mais peu de méthodes modélisent avec succès les matériaux cellulaires à faible densité relative. La modélisation multi-échelle intégrée donne de très bons résultats et est très flexible mais échoue encore à modéliser des structures macroscopiques de grandes dimensions malgré la possibilité d'utiliser la méthode des éléments finis en parallèle. L'approche par Loi Homogène Equivalente est une forme d'approche multi-échelle parce que l'on remplace la structure par un modèle qui doit prendre en compte les différents comportements physiques que peuvent avoir les matériaux cellulaires. La loi de comportement doit être en mesure de modéliser des phénomènes tels que l'anisotropie, la compressibilité, la dissymétrie entre la traction et la compression, la dépendance au trajet de chargement, l'endommagement et les instabilités. Les hypothèses sont plus restrictives mais le gain en temps de calcul est très important par rapport à une approche intégrée. Cette dernière reste néanmoins très utile à des fins de validation. Ainsi, l'approche phénoménologique visant à modéliser des comportements d'une complexité croissante avec une plus grande précision pour des chargements plus complexes ou plus sévères est l'objet de ce travail de thèse. On propose de l'appliquer pour la modélisation du matériau cellulaire modèle au sein de structures sandwichs.

Chapitre 2

Homogénéisation périodique en grandes déformations

Ce chapitre a pour but de présenter l'homogénéisation périodique en grandes déformations. Dans un premier temps, on présente l'écriture du problème mécanique dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Puis, on introduit les grandeurs physiques et mécaniques nécessaires à l'écriture du problème dans le cadre de l'homogénéisation des milieux périodiques. Finalement, on décrit les développements nécessaires à son introduction dans le formalisme des éléments finis. L'application dans le code de calcul Z-set (www.zset-software.com) est présentée en annexe A.

Écriture du problème mécanique en grandes déformations

On considère la mécanique des milieux continus pour décrire la déformation d'un corps matériel \mathcal{M} . On nomme la configuration Ω_t et son bord $\partial\Omega_t$, l'espace qu'occupe les points matériels de ce corps à un instant t . On note $\underline{x}(M, t)$ la position à un instant t d'un point matériel M du corps matériel \mathcal{M} dans l'espace \mathcal{E} muni d'un référentiel \mathcal{R} . On note Ω_0 la configuration initiale à l'instant $t = 0$ dite configuration de référence. On note \underline{X} et \underline{x} respectivement les positions du point matériel M dans la configuration de référence et dans la configuration courante. On considère la transformation Φ qui, à chaque instant t , associe les positions d'un point matériel dans Ω_0 et Ω_t :

$$\underline{x} = \Phi(\underline{X}, t) \quad (2.1)$$

On demande à Φ d'être une application bijective. On écrit donc

$$\underline{X} = \Phi^{-1}(\underline{x}, t) \quad (2.2)$$

Descriptions matérielle et spatiale du mouvement

On peut suivre l'évolution de grandeurs physiques et mécaniques d'un corps matériel dans son mouvement à partir de plusieurs points de vue particuliers.

Description lagrangienne du mouvement

La configuration initiale à $t = 0$ est ici choisie comme configuration de référence. La description lagrangienne du mouvement consiste à considérer les grandeurs physiques et mécaniques étudiées comme des fonctions de la variable $\underline{\mathbf{X}} \in \Omega_0$. Pour suivre la trajectoire d'un point matériel, on observe son déplacement $\underline{\mathbf{u}}$ défini par :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t) \quad (2.3)$$

Description eulérienne du mouvement

La description eulérienne du mouvement consiste à considérer les grandeurs physiques et mécaniques étudiées comme des fonctions du point géométrique $\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{E}$.

Gradient de la transformation

On adopte ici le point de vue lagrangien et on considère la transformation Φ d'une configuration initiale Ω_0 à une configuration actuelle Ω_t . Pour analyser la transformation dans le voisinage du point $\underline{\mathbf{X}}$, on fait appel à la différentielle par rapport aux coordonnées spatiales initiales :

$$d\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{F}} \cdot d\underline{\mathbf{X}}, \text{ avec } \underline{\mathbf{F}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \underline{\mathbf{X}}} \quad (2.4)$$

D'un point de vue physique, $d\underline{\mathbf{X}}$ donne la direction d'une fibre matérielle tracée sur Ω_0 passant par $\underline{\mathbf{X}}$. Cette ligne se transforme en une courbe dont la tangente en $\underline{\mathbf{x}}$ est selon $d\underline{\mathbf{x}}$. On peut assimiler la transformée du petit segment liant $\underline{\mathbf{X}}$ à $\underline{\mathbf{X}} + d\underline{\mathbf{X}}$ au segment $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{F}} \cdot d\underline{\mathbf{X}}$ avec une erreur en $\mathcal{O}(\|d\underline{\mathbf{X}}\|^2)$. On appelle gradient de la transformation, l'application linéaire $\underline{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{X}}, t)$. On a en particulier

$$\underline{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{X}}, t = 0) = \underline{\mathbf{1}} \quad (2.5)$$

On se restreint au cas d'un gradient $\underline{\mathbf{F}}$ inversible et on ne s'intéresse qu'à la situation

$$\det \underline{\mathbf{F}} > 0 \quad (2.6)$$

Le gradient de la transformation s'exprime aussi en fonction du déplacement

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{1}} + \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial \underline{\mathbf{X}}} \quad (2.7)$$

Transport d'un élément de volume

Le volume initial dV d'un élément de volume se transforme en un volume actuel dv valant :

$$\frac{dv}{dV} = J, \text{ avec } J = \det \underline{\mathbf{F}} \quad (2.8)$$

J est le jacobien de la transformation Φ .

Transport d'un élément de surface

On considère l'élément de surface dans la configuration de référence \underline{dS} engendrée par deux fibres matérielles. On obtient l'élément de surface \underline{ds} dans la configuration actuelle par :

$$\underline{ds} = J\tilde{\mathbf{F}}^{-T} \underline{dS} \quad (2.9)$$

Mesures de déformation

On peut effectuer une décomposition polaire du gradient de la transformation :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad (2.10)$$

où \mathbf{R} est un tenseur anti-symétrique de rotation et \mathbf{U} est le tenseur droit des déformations pures. On définit le tenseur \mathbf{C} de Cauchy-Green droit par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (2.11)$$

On peut alors choisir une mesure de la déformation $\mathbf{\Xi}$ dite de Green-Lagrange, symétrique, définie dans le repère de référence, et nulle lors de tout mouvement de corps rigide.

$$\mathbf{\Xi} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H}) \quad \text{avec } \mathbf{H} = \text{Grad } \underline{\mathbf{u}} = \mathbf{F} - \mathbf{1} \quad (2.12)$$

Mesures des contraintes

En utilisant les différents transports entre les configurations courante et de référence, on peut exprimer la puissance des efforts intérieurs \mathcal{P}^i en fonction de différentes grandeurs conjuguées :

$$\mathcal{P}^i = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} dv = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} J dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{\Xi}} dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{F}} dV \quad (2.13)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur eulerien des contraintes de Cauchy et \mathbf{D} le taux de déformation, qui est la partie symétrique de $\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}$, $\mathbf{\Pi} = J\tilde{\mathbf{F}}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \tilde{\mathbf{F}}^{-T}$ est le tenseur de Piola-Kirchhoff 2 et $\mathbf{S} = J\boldsymbol{\sigma} \tilde{\mathbf{F}}^{-T}$ est le tenseur de Piola-Kirchhoff 1

Transition d'échelle et opérations de Moyenne

On considère la moyenne sur le volume Ω_0 des gradients des transformations mésoscopiques \mathbf{F}' cinématiquement admissibles sur le domaine afin de la relier à la moyenne des valeurs du champ de position $\underline{\mathbf{x}}'$ cinématiquement admissible sur le bord $\partial\Omega_0$ de normale $\underline{\mathbf{N}}$.

$$\begin{aligned} \langle F'_{\mathbf{m}iJ} \rangle &= \frac{1}{V} \int_{\Omega_0} F'_{\mathbf{m}iJ} dV \\ &= \frac{1}{V} \int_{\Omega_0} x'_{i,J} dV \\ &= \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega_0} x'_i N_J dS \end{aligned} \quad (2.14)$$

on note $\tilde{\mathbf{F}}' = F'_{iJ} = \frac{\partial x'_i}{\partial X_J}$ où i et J sont les indices de la convention d'Einstein, et J est noté en majuscule pour montré le caractère mixte du tenseur $\tilde{\mathbf{F}}$. L'indice $(\cdot)_{\mathbf{m}}$ indique une grandeur mésoscopique.

On relie de manière similaire la moyenne volumique du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 1 - ou de Boussinesq - à la moyenne des résultantes des vecteurs tractions sur le bord. Le champ $\tilde{\mathbf{S}}^*$ défini sur Ω_0 est supposé statiquement admissible. Ainsi, en tout point de Ω_0 :

$$\text{Div } \tilde{\mathbf{S}}^* = 0 \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \langle S^*_{\mathbf{m}iJ} \rangle &= \frac{1}{V} \int_{\Omega_0} S^*_{\mathbf{m}iJ} dV \\ &= \frac{1}{V} \int_{\Omega_0} \left(\underbrace{S^*_{\mathbf{m}iK,K} x_J}_{0 \text{ car } \text{Div } \tilde{\mathbf{S}}^* = 0} + S^*_{\mathbf{m}iK} x_{J,K} \right) dV \\ &= \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega_0} S^*_{\mathbf{m}iK} N_K x_J dS \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{S}}^*_{\mathbf{m}} : \dot{\tilde{\mathbf{F}}}'_{\mathbf{m}} \rangle &= \frac{1}{V} \int_{\Omega_0} S^*_{\mathbf{m}iJ} \dot{F}'_{\mathbf{m}iJ} dV \\ &= \frac{1}{V} \int_{\Omega_0} S^*_{\mathbf{m}iJ} \dot{u}'_{i,J} dV \\ &= \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega_0} S^*_{\mathbf{m}iJ} N_J \dot{u}'_i dS \end{aligned} \quad (2.17)$$

Grandeurs macroscopiques

L'homogénéisation demande de définir l'ensemble des grandeurs qui seront utilisées à chaque échelle de modélisation. A l'échelle mésoscopique, on note le champ de vitesse $\underline{\dot{\mathbf{u}}}$ en tout point comme étant la somme d'un champ issue d'une vitesse de déformation homogène $\dot{\tilde{\mathbf{F}}}$ et d'un champ de vitesse périodique $\dot{\underline{\mathbf{v}}}$:

$$\underline{\dot{\mathbf{u}}} = \dot{\tilde{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\mathbf{X}} + \dot{\underline{\mathbf{v}}} \quad (2.18)$$

On écrit alors la moyenne des puissances des efforts internes mésoscopiques :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{S}_{\mathbf{m}} : \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{m}} \rangle &= \frac{1}{V} \int_{\Omega_0} S_{\mathbf{m}iJ} \dot{F}_{\mathbf{m}iJ} dV \\
&= \frac{1}{V} \int_{\Omega_0} S_{\mathbf{m}iJ} \dot{u}_{i,J} dV \\
&= \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega_0} S_{\mathbf{m}iJ} N_J \dot{u}_i dS \\
&= \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega_0} S_{\mathbf{m}iJ} N_J \left(\dot{F}_{ik} X_k + \dot{v}_i \right) dS \\
&= \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega_0} \left(S_{\mathbf{m}iJ} N_J \dot{F}_{ik} X_k + S_{\mathbf{m}iJ} N_J \dot{v}_k \right) dS \\
&= \frac{1}{V} \left(\int_{\partial\Omega_0} S_{\mathbf{m}iJ} N_J \dot{F}_{ik} X_k dS + \underbrace{\int_{\partial\Omega_0} S_{\mathbf{m}iJ} N_J \dot{v}_k dS}_{0 \text{ car périodique}} \right) \\
&= \frac{1}{V} \int_{\Omega_0} S_{\mathbf{m}iJ} \dot{F}_{iJ} dV \\
&= \frac{1}{V} \int_{\Omega_0} S_{\mathbf{m}iJ} dV \dot{F}_{iJ} \\
&= \langle \mathbf{S}_{\mathbf{m}} \rangle : \dot{\mathbf{F}}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

On en conclut que le travail des forces internes macroscopiques est égal à la moyenne du travail des forces internes mésoscopiques (lemme de Hill-Mandel, Hill (1967))

$$\langle \mathbf{S}_{\mathbf{m}} : \mathbf{F}_{\mathbf{m}} \rangle = \langle \mathbf{S}_{\mathbf{m}} \rangle : \langle \mathbf{F}_{\mathbf{m}} \rangle = \mathbf{S} : \mathbf{F} \tag{2.20}$$

Homogénéisation numérique

Les développements nécessaires à l'introduction des grandeurs macroscopiques dans un calcul éléments finis sont présentés dans cette partie.

Formulation éléments finis

La formulation *total lagrangian* est décrite ici pour la discrétisation du problème mécanique :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \sum_{j=1}^n \underline{\mathbf{N}}_j(X) \underline{\mathbf{u}}_j(t) \tag{2.21}$$

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \mathbf{N} \mathbf{u} \text{ avec } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1(X) & N_2(X) & \cdots & N_n(X) \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{1}} + \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial \underline{\mathbf{X}}} = \underline{\mathbf{1}} + \mathbf{B}_0 \mathbf{u} \text{ où } \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} N_{1,X} & N_{2,X} & \cdots & N_{n,X} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

avec \mathbf{B}_0 la matrice des dérivées des fonctions de forme \mathbf{N}_0 par rapport à la configuration de référence.

Degrés de libertés macroscopiques

On s'intéresse maintenant à la formulation éléments finis d'un problème mécanique d'homogénéisation périodique avec conditions de périodicité. On peut réécrire la matrice des dérivées des fonctions de forme et des degrés de liberté du problème en intégrant les degrés de liberté macroscopiques :

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{1}} + \mathbf{B}'_0 \mathbf{u}' \text{ avec } \mathbf{B}'_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \mathbf{B}_0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{u}' = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{22} \\ F_{33} \\ F_{23} \\ F_{32} \\ F_{13} \\ F_{31} \\ F_{12} \\ F_{21} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Hypothèse des petites déformations en homogénéisation périodique

Transformations infinitésimales

Il est intéressant de simplifier les méthodes mathématiques de résolution du problème mécanique posé en utilisant l'hypothèse des transformations infinitésimales. En faisant l'hypothèse de linéarisation de la déformation, on retrouve la formulation classique de l'homogénéisation périodique :

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} := \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{H}} + \underline{\mathbf{H}}^T) \text{ avec } \underline{\mathbf{H}} = \text{Grad } \underline{\mathbf{u}} \quad (2.25)$$

Ce tenseur des déformations infinitésimales est la partie symétrique du gradient du déplacement. Le cadre des transformations infinitésimales est plus restrictif que celui où l'on ne demanderait qu'aux seules déformations d'être infinitésimales, car il faut également que les rotations $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ soient infinitésimales :

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} := \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{H}} - \underline{\mathbf{H}}^T) \quad (2.26)$$

En résumé, le cas particulier des petites déformations revient à avoir :

$$\begin{aligned} |\underline{\mathbf{H}}| \ll 1 &\implies |\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}| \ll 1, |\underline{\boldsymbol{\omega}}| \ll 1 \\ \underline{\mathbf{F}} \simeq \underline{\mathbf{1}} &\implies \underline{\mathbf{R}} \simeq \underline{\mathbf{1}}, \underline{\mathbf{U}} \simeq \underline{\mathbf{1}} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ce qui implique pour l'homogénéisation périodique :

$$\begin{aligned}\langle \underline{\varepsilon}_{\mathbf{m}} \rangle &= \frac{1}{V} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}_{\mathbf{m}} dV \\ &= \underline{\tilde{E}}\end{aligned}\tag{2.28}$$

où $\underline{\tilde{E}}$ est la moyenne des déformations mésoscopiques $\underline{\varepsilon}_{\mathbf{m}}$ et :

$$\begin{aligned}\langle \underline{\sigma}_{\mathbf{m}} \rangle &= \frac{1}{V} \int_{\Omega} \underline{\sigma}_{\mathbf{m}} dV \\ &= \underline{\tilde{\Sigma}}\end{aligned}\tag{2.29}$$

où $\underline{\tilde{\Sigma}}$ est la moyenne des contraintes mésoscopiques $\underline{\sigma}_{\mathbf{m}}$. L'écriture du champ de déplacement mésoscopique dans le cadre de l'homogénéisation des milieux périodiques s'écrit alors :

$$\underline{u} = \underline{\tilde{E}} \cdot \underline{x} + \underline{v}\tag{2.30}$$

Chapitre 3

Homogénéisation périodique et caractérisation du comportement élasto-plastique des empilements de tubes

La modélisation de structures sandwichs macroscopiques de grandes dimensions avec un cœur cellulaire dans le cas où la structure à l'échelle mésoscopique est du même ordre de grandeur de taille que la structure se confronte à deux limitations. D'une part, leur modélisation devient coûteuse en temps de calcul de par le grand nombre d'hétérogénéités à prendre en compte. Et d'autre part, l'application de la technique de l'homogénéisation s'approche de la limite de validité des hypothèses de la méthode. De plus, le matériau cellulaire modèle étudié a un taux de porosité située entre celui des matériaux tels que les mousses ou celui des matériaux poreux. Ainsi, l'objectif de cette partie est d'identifier une loi phénoménologique élasto-plastique compressible fortement anisotrope sur la base du comportement caractérisé du matériau modèle par la technique de l'homogénéisation des milieux périodiques. Ainsi, l'approche utilisée permet de déterminer le lien entre l'architecture à l'échelle mésoscopique de l'empilement, le comportement du matériau constitutif et le comportement macroscopique pour des chargements multi-axiaux. L'étude se concentre sur le comportement mécanique pour des déformations macroscopiques inférieures à 5%. Ainsi, on se place en première approche dans l'hypothèse des petites déformations ce qui simplifie grandement la résolution du problème mécanique et diminue les coûts des calculs éléments finis.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été soumis à publication dans *International Journal of Mechanical Sciences* (Iltchev *et al.*). Les figures sont données ici en couleur par rapport à l'article soumis et leur mise en page est uniformisée avec le reste du manuscrit. On propose, dans un premier temps (section 3.1), d'appliquer l'homogénéisation périodique en petites déformations pour l'étude des cœurs cellulaires des structures sandwichs modèles présentées dans l'introduction. Cette étude est menée jusqu'à 5% de déformation inélastique macroscopique pour étendre l'approche par modélisation de la cellule unitaire

de Tsuda *et al.* (2010) à des niveaux de déformations plus importants et avec des conditions aux limites périodiques. De plus, en appliquant la formulation de l'homogénéisation périodique numérique proposée par Feyel et Chaboche (2000), les calculs sont pilotés en contraintes macroscopiques ce qui permet de solliciter la cellule périodique selon des chemins de chargements proportionnels dans l'espace des contraintes. Ceci permet d'analyser les évolutions de la limite d'élasticité et du comportement inélastique pour des chargements multi-axiaux.

La section 3.2 est quant à elle dédiée à l'identification d'une Loi Homogène Equivalente (LHE) rendant compte du comportement de chaque empilement, carré et hexagonal, de tubes. Les LHE ainsi identifiées doivent permettre par la suite la modélisation des structures sandwichs à cœur cellulaire.

Une étude des structures sandwichs de taille finie est proposée dans la section 3.3 pour des cas de chargement en compression et en glissement simple. Le cœur des structures sandwichs étudiées est constitué d'un nombre fini de tubes dans la largeur et dans la hauteur. L'effet de taille et l'influence des effets de bords sont étudiés dans le cas de ces matériaux cellulaires de densités relatives d'environ 30% pour les deux types d'empilement. Une première étape a consisté à calculer toutes les tailles de structures pour chaque type d'empilement entre 3 et 11 tubes dans les deux directions. Ces calculs sur structures entièrement maillées servent de références. Puis, dans une deuxième étape, des calculs utilisant des Milieux Homogènes Equivalents (MHE) ont été effectués pour chaque taille de structure sandwich. Leurs comportements ont été comparés à ceux des calculs de référence sur structures complètement maillées.

Finalement, en section 3.4, différents compléments au contenu de l'article soumis (Iltchev *et al.*) sont fournis. On présente tout d'abord les résultats de la caractérisation des VER de chaque empilement pour des chargements multi-axiaux. Puis, le comportement multi-axial des LHE identifiées est décrit. Pour finir, une phase de validation est réalisée à partir de calculs de flexion sur des structures sandwichs entièrement maillées et modélisées avec le MHE proposé.

3.1 Periodic homogenisation analysis of cellular structures

In order to study the macroscopic mechanical behaviour of heterogeneous solids with specific architectures such as those of the tube stackings considered here, a characterisation procedure is proposed involving both the finite element (FE) modelling of virtual multi-axial loading tests and periodic homogenisation techniques.

3.1.1 Homogenisation method

This kind of cellular structure can be analysed by following a standard homogenisation method. Therefore, the macroscopic strain $\tilde{\mathbf{E}}$ and the macroscopic stress $\tilde{\mathbf{\Sigma}}$ are introduced, according to the definition of Hill (1967) and Suquet (1987) for periodic homogenisation. They derive from the microscopic strain $\mathbf{\xi}$ and the microscopic stress $\mathbf{\sigma}$ obeying Eqs. (3.1) and (3.2) :

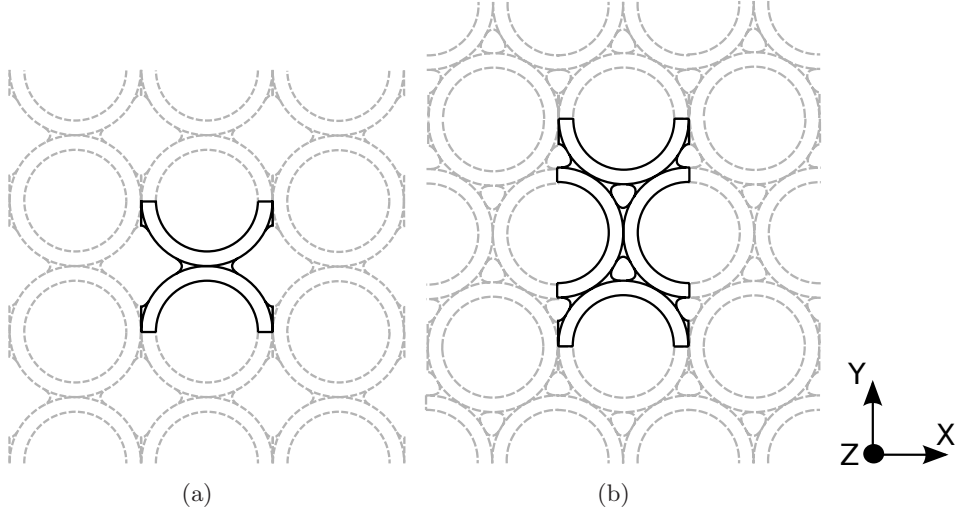


FIG. 3.1 – Unit cells of the periodic tube stackings studied : (a) the square pattern, (b) the hexagonal pattern.

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V_{\Omega}} \int_{V_{\Omega}} \boldsymbol{\sigma} \, dV_{\Omega} \quad (3.1)$$

$$\bar{\boldsymbol{E}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V_{\Omega}} \int_{V_{\Omega}} \boldsymbol{\varepsilon} \, dV_{\Omega} \quad (3.2)$$

with V_{Ω} denoting the volume of Ω , the domain occupied by the considered unit cell.

The multi-scale character of the studied cellular structures is used to carry out the averaging procedure; one periodic unit cell is isolated for each stacking pattern as illustrated in solid lines in Fig. 3.1. Since focus is only on both elastic and plastic mechanical properties here, the periodic unit cells are valid representative volume elements (RVEs) of the considered regular tube stackings (Ostoja-Starzewski, 2006). FE simulations were conducted on the RVE of each stacking pattern to characterise their homogenised mechanical behaviour under multi-axial loads. The RVEs were meshed with triangular quadratic elements and the FE code *Z-set* (<http://www.zset-software.com/>) was used for the simulations. The different modelling assumptions formulated in the present work are listed hereafter.

Owing to the extruded character of the tube stackings only two-dimensional cross sections of the RVEs have been considered by using generalised plane-strain conditions. Hence it enabled us to simulate both in-plane and out-of-plane mixed loading cases without considering three-dimensional meshes (Besson *et al.*, 2009). To apply the periodic boundary conditions, linear multi-point constraints were imposed on the periodic components of the total displacement field on the pairs of opposite nodes on the boundary of the RVEs. The periodic components of the displacements were also set to zero on the unit cell vertices to fix rigid body motions. A small deformation formulation was adopted too for the range of macroscopic strain studied (up to 5%). The periodic homogenisation formu-

lation implemented in *Z-set* allows to prescribe either macroscopic strains or macroscopic stresses (Feyel et Chaboche, 2000).

To illustrate the homogenisation approach described in the present paper, the constitutive material has been assumed to be homogeneous in the tubes and in the braze joints on the basis of our previous works on brazed tube stackings made of nickel-base superalloys (Marcadon et Kruch, 2011; Marcadon *et al.*, 2012). Its mechanical properties were identified by performing tensile tests on single tubes after the brazing heat treatment (see (Marcadon et Kruch, 2011; Marcadon *et al.*, 2012) for more details concerning the processing of such tube stackings and the mechanical characterisation of their constitutive material). The constitutive material is assumed to exhibit an isotropic linear elasticity (Hooke's law) and an isotropic non-linear plasticity governed by von Mises yield criterion. The classic additive decomposition of the total strain $\underline{\varepsilon}$ into an elastic part $\underline{\varepsilon}_e$ and a plastic one $\underline{\varepsilon}_p$, i.e. $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_e + \underline{\varepsilon}_p$, is assumed. The constitutive equations of the bulk metal model are the following :

$$\underline{\varepsilon}_e = \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\sigma}) \underline{\mathbf{I}} \quad (3.3)$$

and

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.4)$$

where $\dot{\lambda}$ is the scalar plastic multiplier and $\underline{\mathbf{I}}$ is the second-order identity tensor. E and ν denote Young's modulus and Poisson's ratio of the constitutive material, respectively. The yield function is :

$$\mathcal{F}(\underline{\sigma}, p_m) = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\sigma}_D : \underline{\sigma}_D} - r(p_m) \quad (3.5)$$

with $\underline{\sigma}_D$ the deviatoric part of $\underline{\sigma}$, $\underline{\sigma}_D = \underline{\sigma} - (1/3)\text{tr}(\underline{\sigma})\underline{\mathbf{I}}$, and p_m the cumulated plastic strain,

$$p_m = \int_0^t \sqrt{(2/3) \dot{\underline{\varepsilon}}_p : \dot{\underline{\varepsilon}}_p} dt \quad (3.6)$$

The instantaneous yield stress $r(p_m)$ varies according to the following relation :

$$r(p_m) = \sigma_y + hp_m + q(1 - \exp(-bp_m)) \quad (3.7)$$

with σ_y and h denoting the initial yield stress and the hardening modulus of the constitutive material, respectively. q and b are the material parameters of the non-linear hardening term. The different material parameters used are listed in Table 3.1.

In the present paper a fixed geometry has been considered for both stackings. The external diameter of the tubes and their thickness are equal to 5 mm and 500 μm , respectively, whereas the length of the braze joints is 1 mm. For this set of geometrical parameters, the ratio of matter is about 29% for the square stacking and 32% for the hexagonal one.

TAB. 3.1 – Mechanical properties used for the constitutive material (coming from (Marcadon et Kruch, 2011)).

Young's modulus E [MPa]	171900.
Poisson's ratio ν	0.3
Initial yield stress σ_y [MPa]	160.8
Hardening modulus h [MPa]	1974.
Non-linear hardening parameters q [MPa], b	46.5, 76.2

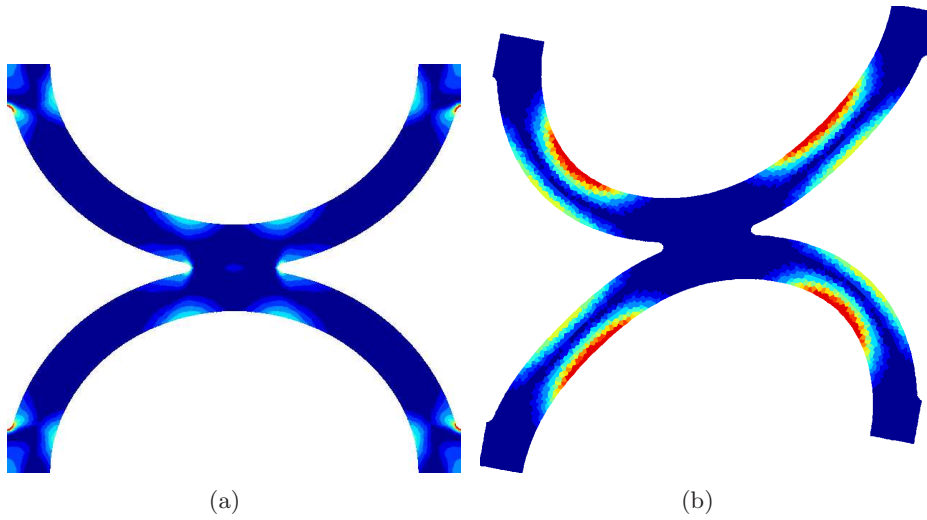


FIG. 3.2 – Von Mises stress maps obtained for the square stacking for a macroscopic strain of 5% : (a) uni-axial tension along the X-direction (a similar map is obtained for the tension along the Y-direction but rotated with an angle of 90°) (b) simple shear in the XY-plane. The maps are plotted in terms of integration node values.

3.1.2 Homogenised uni-axial mechanical responses

The first step for the numerical mechanical characterisation consisted in the FE simulation of uni-axial tests on the RVEs of the tube stackings. Uni-axial tensions in both the X- and Y-directions (axes are defined in Fig. 3.1) have been performed as well as XY-plane shear up to 5% of total strain (as illustrated in Fig. 3.2 for the square stacking and in Fig. 3.3 for the hexagonal stacking). Uni-axial tensile tests along the out-of-plane Z-direction have been performed too for the same level of strain.

From the different uni-axial tensile and simple shear tests simulated, the elastic moduli have been identified first from purely elastic simulations, in order to avoid a plastic contribution that can occur even for very low strain levels due to stress concentration observed for cellular structures. The effective elastic behaviour of the stackings is defined

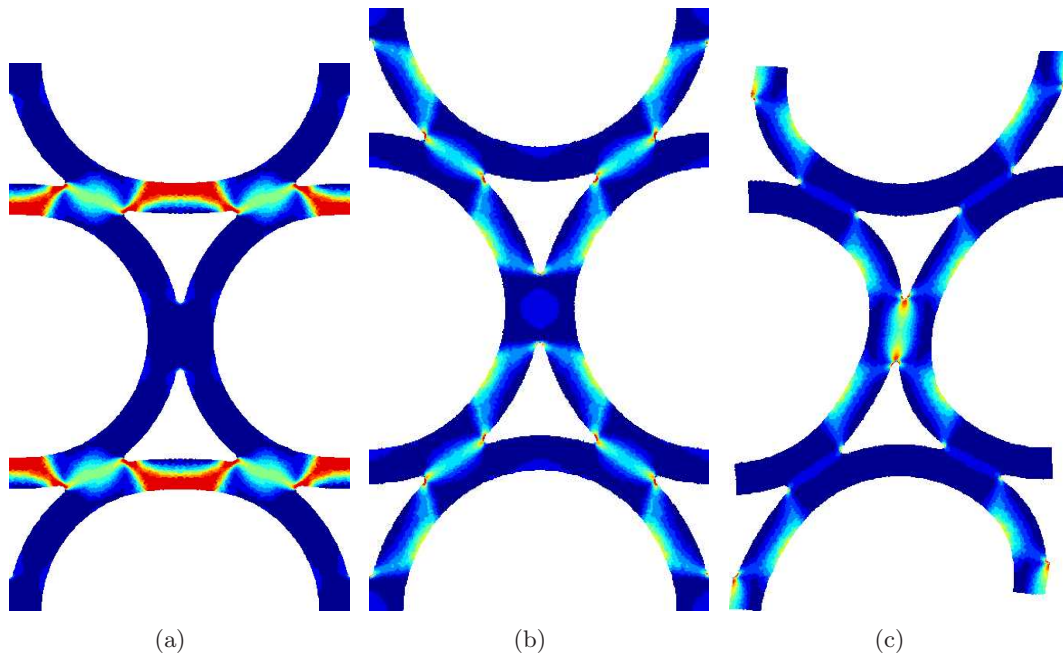


FIG. 3.3 – Von Mises stress maps obtained for the hexagonal stacking for a macroscopic strain of 5% : (a) uni-axial tension along the X-direction (b) uni-axial tension along the Y-direction (c) simple shear in the XY-plane. The maps are plotted in terms of integration node values.

TAB. 3.2 – Elasticity moduli identified by periodic homogenisation [MPa]. The lower indexes $_1$, $_2$ and $_3$ refer to the X-, Y- and Z-directions of Fig. 3.1, respectively. The components C_{2323} and C_{3131} are not available because of the generalised plane-strain formulation used for the simulations.

$\underline{\underline{C}}$ component [MPa]	Square stacking	Hexagonal stacking
$C_{1111} = C_{2222}$	7555.	25462.
C_{3333}	51688.	63329.
$C_{1122} = C_{2211}$	6744.	9476.
$C_{2233} = C_{3311}$	4292.	10490.
C_{1212}	2200.	8010.

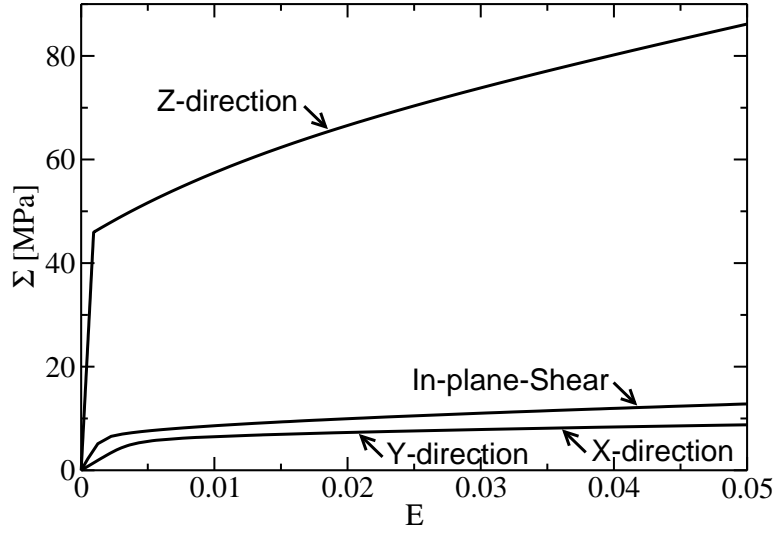
by Hooke's law for linear anisotropic elasticity :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}}_e \quad (3.8)$$

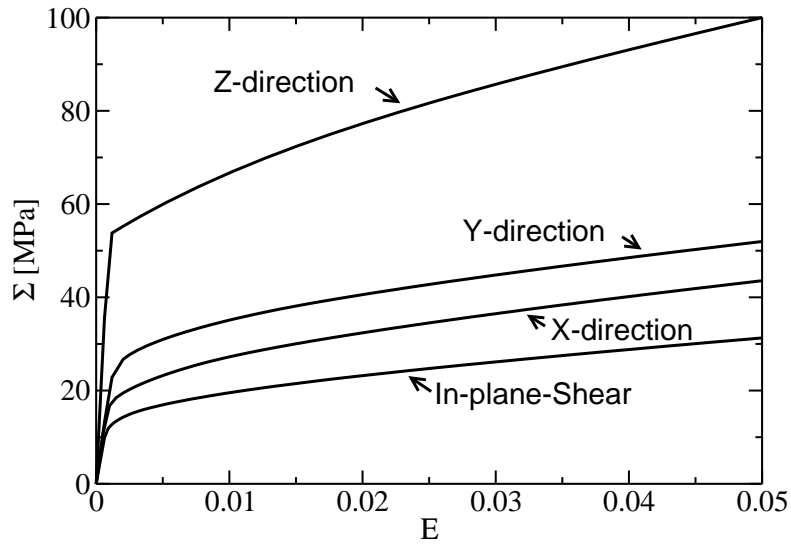
where $\underline{\underline{C}}$ and $\underline{\underline{E}}_e$ denotes the effective stiffness tensor and the elastic part of the macroscopic strain tensor, respectively. The different components identified for $\underline{\underline{C}}$ are given in Table 3.2 for both stacking patterns.

The results of the homogenisation procedure exhibit a non-linear and a strongly anisotropic behaviour in the case of the elasto-plastic simulations (see Fig. 3.4), whatever the loading case is. The main anisotropy comes from the extruded character of the tube stackings; the whole cross-section is homogeneously deformed in the Z-direction and the tube stacking behaves similarly to its constitutive material to within a factor that equals approximately the fraction of matter present in the cross-section. The in-plane directions, X- and Y-directions show non-linear behaviours for both types of stacking. It is the result not only of the non-linear behaviour of the base material, but also of the microscopic stress concentration in the tube walls and around the braze joints. The X- and Y-directions are equivalent in the case of the square stacking, leading to the same mechanical responses in both directions as illustrated in Fig. 3.4(a). On the contrary, the hexagonal stacking shows an additional in-plane plastic anisotropy (see Fig. 3.4(b)). The orientation of the braze joints relative to the load direction in this particular stacking is different for each in-plane direction, hence different concentrations of the microscopic stress induce an earlier plastic yield in the neighbourhood of the braze joints for a tensile test along the X-direction than along the Y-direction. The macroscopic mechanical response of the hexagonal stacking along the Y-direction for uni-axial tension is therefore stronger than that along the X-direction. However, the hexagonal stacking remains isotropic in terms of in-plane elasticity.

The square and hexagonal stackings show a rather similar strength along the out-of-plane direction (the fractions of matter in the cross-sections of the RVEs equal to about 29 and 32 % for the square and the hexagonal stackings, respectively). On the contrary, the



(a)



(b)

FIG. 3.4 – Mechanical responses for the uni-axial tensile tests along the X-, Y- and Z-directions, and the simple shear in the XY-plane (a) for the square stacking, (b) for the hexagonal stacking.

strength of the square stacking along the in-plane directions is considerably lower than that of the hexagonal stacking. The in-plane / out-of-plane anisotropy is considerably higher for the square stacking. Braze joints have a stiffening effect on tube walls; they are more numerous for the hexagonal stacking, thus they are closer from ones to each others on a tube wall. Hence, the specific density is not necessary the most relevant geometrical parameter to explain the evolution of the mechanical properties of cellular structures (Marcadon et Kruch, 2013; Marcadon et Feyel, 2009). It can be also noticed that, the in-plane shear strength of the square stacking is higher than its in-plane tensile strength, which is not the case for the hexagonal stacking.

3.1.3 Planar bi-axial yield surfaces

The anisotropy of the plastic responses and their evolutions as a function of the loading path have then been characterised for each stacking pattern by a large number of FE simulations of bi-axial tensions. The yield surfaces have been built by simulating proportional loading paths in the space of the principal macroscopic stresses. Indeed, in a chosen $\Sigma_a \Sigma_b$ -plane, where Σ_a and Σ_b are the principal components of the bi-axial loading, proportional loading paths can be set for a discrete number of θ ranging in $[0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} \Sigma_a = \Sigma_0 \cos \theta \\ \Sigma_b = \Sigma_0 \sin \theta \end{cases} \quad (3.9)$$

with Σ_0 denoting the amplitude of the bi-axial load. According to the additive decomposition of the total macroscopic strain $\tilde{\mathbf{E}}$ into an elastic part and a plastic one, the macroscopic plastic strain $\tilde{\mathbf{E}}_p$ can be computed from relation :

$$\tilde{\mathbf{E}}_p = \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{C}}^{-1} : \tilde{\mathbf{\Sigma}} \quad (3.10)$$

As already mentioned, the macroscopic plasticity results from both the constitutive material (through its plastic properties) and the architecture of the cellular structure (due to stress concentration) (Mangipudi et Onck, 2011; Marcadon *et al.*, 2012). Thus a measure of the macroscopic cumulated plastic strain p has been chosen to parametrise the evolution of the hardening behaviour :

$$p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p : \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p} dt \quad (3.11)$$

The macroscopic stress controlled proportional loading paths provide the minimal macroscopic cumulated plastic strain for a given macroscopic stress state. It is the shortest path to reach a point on the actual yield surface.

Various threshold values of $p = p_1, p_2 \dots p_n$ have been set and for each one the corresponding macroscopic stress state was returned (see Fig. 3.5). An iterative routine was applied for a finer convergence toward the imposed thresholds. Both in-plane and combinations of in-plane and out-of-plane bi-axial loading cases have been simulated first on the RVEs. Iso-value surfaces of the macroscopic cumulated plastic strain have thus been drawn by assembling the results of the simulated multi-axial tests obtained by varying the

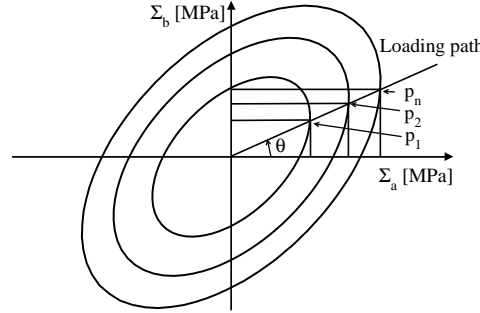
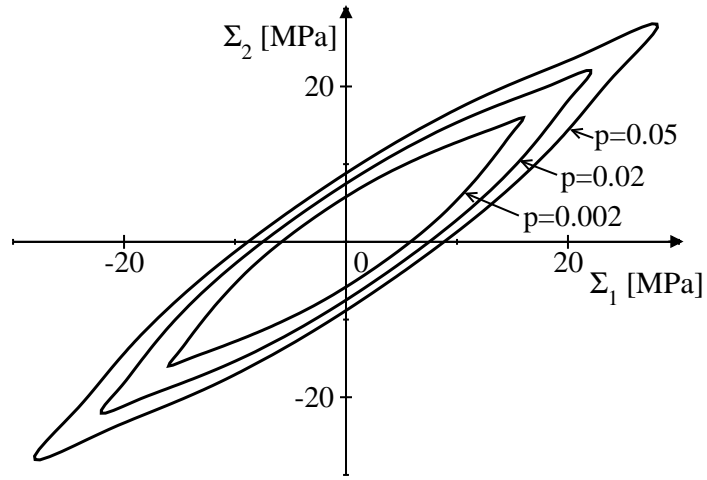


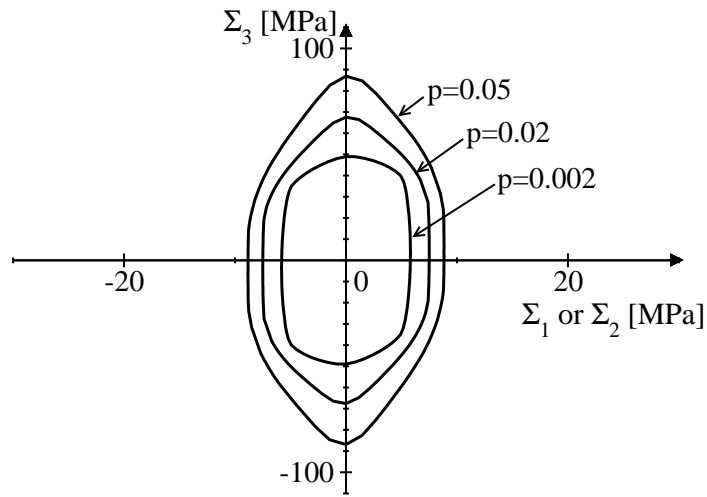
FIG. 3.5 – Construction method of the yield surfaces.

value of θ in the range of $[0, 2\pi]$. The surfaces obtained in this way for each p_n have then been considered as macroscopic yield surfaces. The steps of θ depend on the local curvature of the yield surface; it varies from 0.5° where the curvature is high to 10° for a low curvature. The yield surfaces obtained for both stacking patterns are illustrated in Figs. 3.6 and 3.7 for threshold values for $p = 0.002, 0.02$ and 0.05 .

The analysis of the yield surfaces is in accordance with the results coming from the uni-axial characterisation, see Figs. 3.4(a) and 3.6 for the square stacking or Figs. 3.4(b) and 3.7 for the hexagonal one. They provide the same information for these particular loading cases. Figs. 3.6 and 3.7 highlight the anisotropy of the in-plane and out-of-plane behaviours for both stackings. Especially, the strong out-of-plane anisotropy observed results from the extruded character of the tube stackings and their higher strength along the Z-direction. Similar anisotropic behaviours have been already observed by Sanders et Gibson (2003b,a) on regular hollow-sphere stackings. However, some differences exist between the square stacking behaviour and that of the hexagonal stacking. Indeed, because of the equivalent roles of the X- and Y-directions for the square stacking, the yield surfaces exhibit a symmetric shape close to be elliptic but elongated along the axis for which $\Sigma_1 = \Sigma_2$. This is never the case for the hexagonal stacking which the yield surfaces have non-quadratic shapes. However, the quadratic description or not of the yield surfaces remains a rather complex issue. As described below (see Section 3.2), even though the shape of the yield surfaces remains non-quadratic in all cases for the hexagonal stacking, if the yield surfaces are plotted in 2D in terms of plastic work density rather than cumulated plastic strain, those of the square stacking exhibit a quadratic shape. Thus, we suppose that the non-quadratic shape of the yield surfaces is intrinsic to the hexagonal stacking. It can be explained by the architecture; the localisation of the plasticity in the neighbourhood of the braze joints first and then in the tube walls govern the direction of the plastic flow and its evolution. On the contrary, the pointed shape of the yield surfaces observed for the square stacking in 3D may result from out-of-plane plastic Poisson's ratio effects.

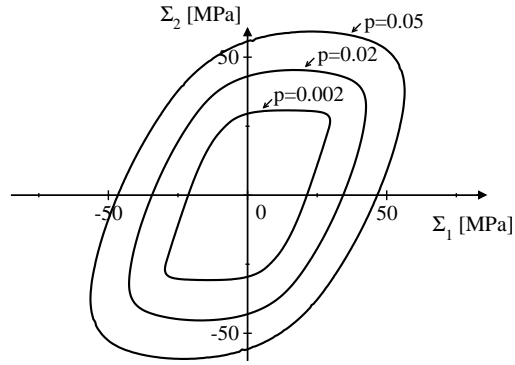


(a)

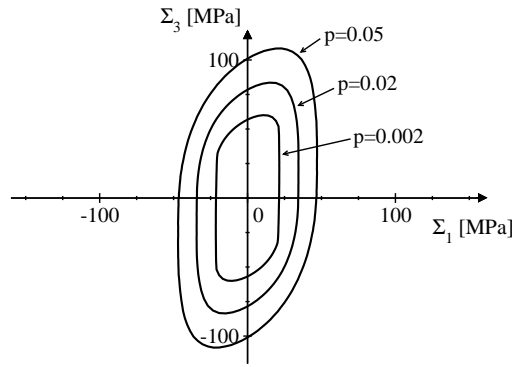


(b)

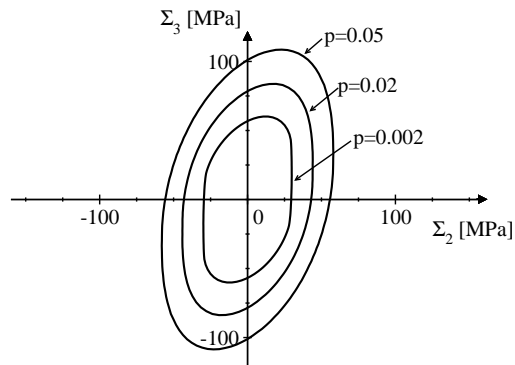
FIG. 3.6 – Planar yield surfaces for the square stacking : (a) $\Sigma_1\Sigma_2$ -plane (b) $\Sigma_1\Sigma_3$ -plane (or $\Sigma_2\Sigma_3$).



(a)



(b)



(c)

FIG. 3.7 – Planar yield surfaces for the hexagonal stacking : (a) $\Sigma_1\Sigma_2$ -plane (b) $\Sigma_1\Sigma_3$ -plane (c) $\Sigma_2\Sigma_3$ -plane.

3.1.4 General multi-axial loading cases

This section aims at generalising the method used previously for the characterisation of the planar bi-axial yield surfaces to 3D multi-axial ones. Only the initial yield surface $p = 0.002$ has been represented for that purpose. This new representation of the yield surface provides additional information regarding the compressibility of the tube stackings under tri-axial loading, and its anisotropy. The loading paths simulated were no longer proportional but, instead, a pre-load up to a macroscopic hydrostatic stress state then followed by a multi-axial loading path along the radii of the deviatoric planes have been applied to the RVEs. The deviatoric planes are those having the hydrostatic Σ_h -axis as normal, i.e. the planes in which $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3$. Assuming that the macroscopic behaviour is purely elastic up to the yield stress allows the use of non-proportional loading paths. To characterise the evolution of the three-dimensional yield surfaces, we could have considered a projection of the loading paths onto a system of spherical coordinates, similarly to the method used before to obtain the planar bi-axial yield surfaces. But it would have required too many simulations.

Fig. 3.8 shows that the obtained 3D yield surfaces are closed along the spherical part of the macroscopic stress. The tips of the yield surfaces showing the compressible plastic behaviour are not centred around the hydrostatic Σ_h -axis because of the higher strength along the Z-direction characterising both the square and the hexagonal stackings. It can be also noticed that the surfaces are rather flat in the $\Sigma_h\Sigma_3$ -plane, especially for the square stacking. Moreover, the near-vertical edge of the yield surfaces under macroscopic hydrostatic loading illustrates the very high yield stress along the out-of-plane direction.

3.2 Identification of homogeneous equivalent laws

After having characterised the anisotropic elasto-plastic behaviour of both the square and the hexagonal stackings, focus is now on the construction of homogeneous equivalent laws (HEL) of these cellular architectures. They have to gather the distinctive features observed previously from the simulations on the RVE, such as their anisotropic elasticity and anisotropic compressible plasticity. We first start with the identification of a yield criterion for the square stacking and then address the case of the hexagonal stacking. Both stackings have some features in common but they differ regarding the equivalent stress measure involved in the yield function.

3.2.1 Square stacking

Formulation of the yield criterion

The total macroscopic strain $\tilde{\mathbf{E}}$ is additively decomposed in the same manner as before (Eq. (3.10)), i.e. with an elastic part $\tilde{\mathbf{E}}_e$ obeying Eq. (3.8) and a plastic part $\tilde{\mathbf{E}}_p$ obeying an associated plastic flow rule :

$$\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}} \quad (3.12)$$

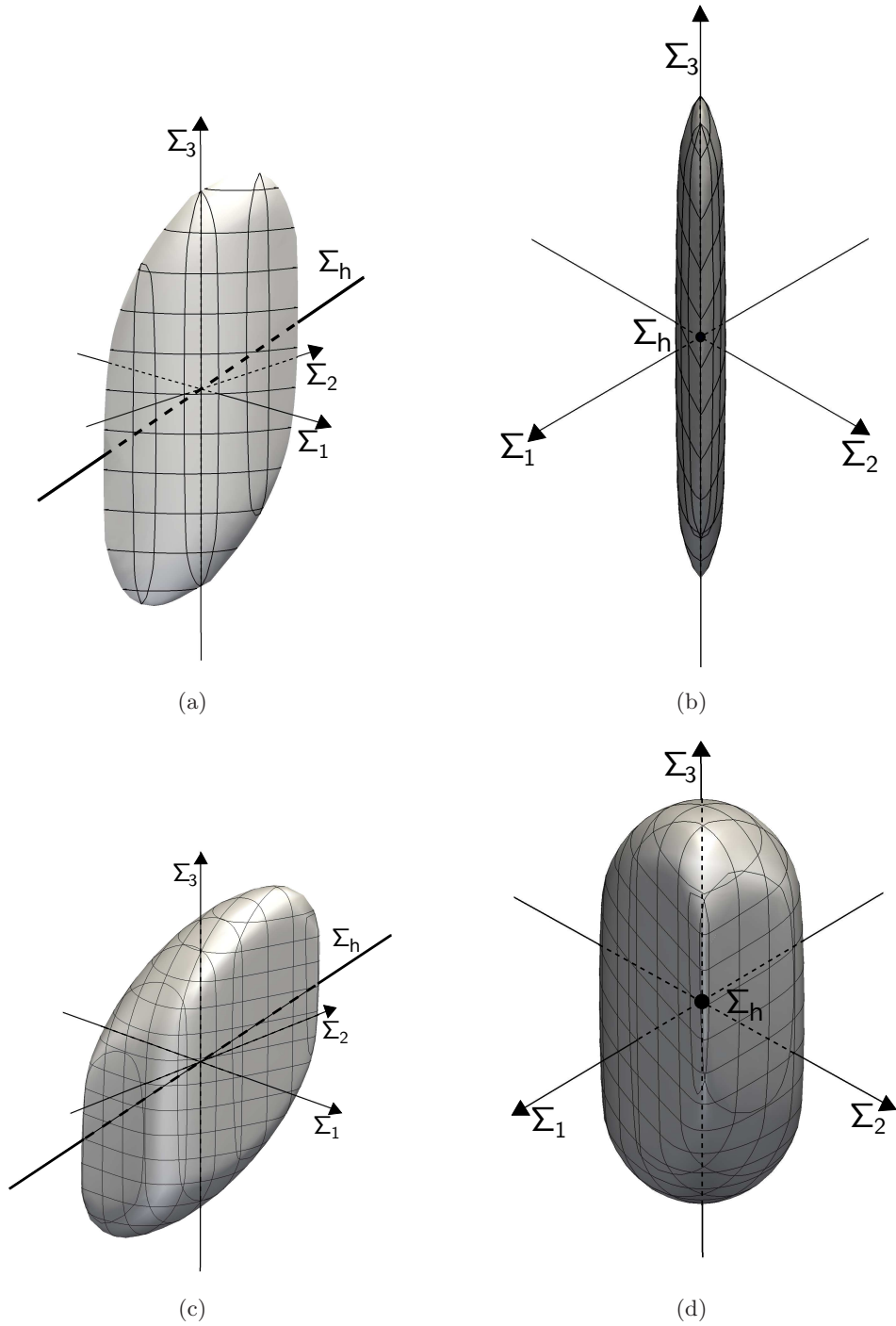


FIG. 3.8 – Initial $p = 0.002$ three-dimensional yield surfaces in the space of the macroscopic stresses : (a) and (b) for the square stacking (c) and (d) for the hexagonal stacking. For the sake of clarity, there are no units on the axes and the reader has to refer to Figs. 3.6 and 3.7 for the values for the square and the hexagonal stackings, respectively. However, the shapes of the three-dimensional yield surfaces illustrated in this figure are not distorted ones; the scale is the same for all the axes.

with $\dot{\lambda}$ the scalar plastic multiplier and \mathcal{G} the plastic potential written as $\mathcal{G}(\underline{\Sigma}, p) = \Sigma_{eq} - R(p)$. An elliptic anisotropic criterion, based on Green (1972)'s one and proposed by Badiche *et al.* (2000), is chosen as yield criterion :

$$\Sigma_{eq}^2 = 3C\Sigma_e^2 + F\Sigma_m^2 \quad (3.13)$$

where C and F are scalar material coefficients and where Σ_m denotes the modified trace of $\underline{\Sigma}$.

$$\Sigma_m = c_1\Sigma_{11} + c_2\Sigma_{22} + c_3\Sigma_{33} \quad (3.14)$$

with c_1 , c_2 and c_3 three scalar material coefficients expressing the anisotropy of the compressibility. The criterion is written in a general way from the literature and the F parameter of Eq. (3.13) sets the sensitivity to a hydrostatic stress state. In the anisotropic formulation, F becomes redundant with the coefficients on the components of the trace of the macroscopic stress tensor, hence F is set to 1. Eq. (3.13) is also function of an equivalent shear stress Σ_e . Since in the case of the square stacking a close to quadratic plastic behaviour has been observed, an equivalent stress of Hill (1948) has been chosen :

$$\Sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\underline{\Sigma}_D : \underline{\underline{H}} : \underline{\Sigma}_D \right)} \quad (3.15)$$

where $\underline{\Sigma}_D$ denotes the macroscopic deviatoric stress tensor, $\underline{\Sigma}_D = \underline{\Sigma} - (1/3)\text{tr}(\underline{\Sigma})\underline{\underline{I}}$, and $\underline{\underline{H}}$ is Hill's fourth-order diagonal tensor governing the anisotropy. An equivalent macroscopic plastic strain \dot{p} has been defined from Eq. (3.12) as $\dot{p} = \dot{\lambda}$ assuming an associated plastic flow and the equality of the macroscopic plastic dissipation (Badiche *et al.*, 2000) :

$$\underline{\Sigma} : \dot{\underline{\underline{E}}}_p = \Sigma_{eq}\dot{p} \quad (3.16)$$

The effective hardening $R(p)$ of the cellular structure is non-linear isotropic with the form :

$$R(p) = \Sigma_y + Hp + Q_1(1 - \exp(-B_1p)) + Q_2(1 - \exp(-B_2p)) \quad (3.17)$$

where Σ_y and H denotes the initial effective yield stress and the effective hardening modulus. The Q_i and B_i are the parameters of the effective non-linear hardening terms. An additional non-linear exponential term has been added compared to the constitutive material in order to account for the non-linearities induced by the architecture.

Effective mechanical properties

After having defined the formalism of the homogeneous equivalent law, the different effective parameters have been identified from the simulated uni-axial tensile tests, the shear test and the in-plane bi-axial yield surface. The elastic moduli have been identified first from the extension and shear tests, as mentioned previously. They are given in Table 3.2. However, the identification of the effective plastic properties is more complex and, because of the number of parameters, a numerical fitting procedure has been carried out.

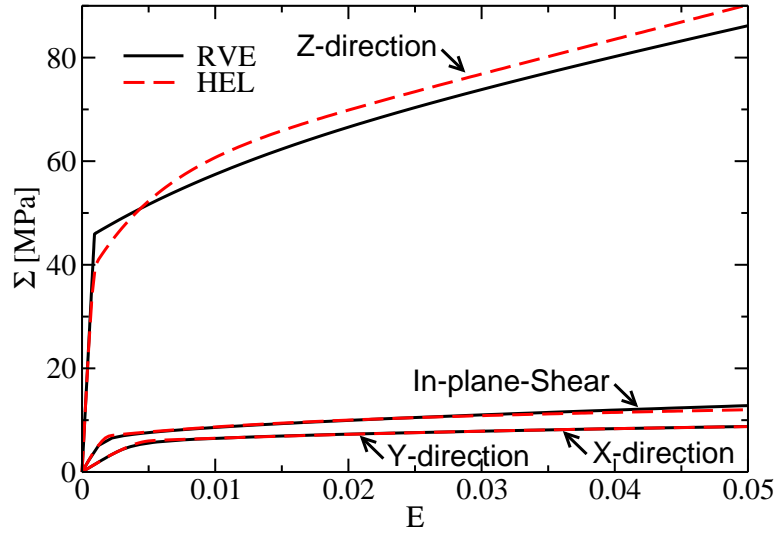
The shear coefficient of Hill's tensor $\underline{\underline{H}}$ is multiplied by the scalar C . Since C is in relation with Σ_e in Eq. (3.13), it gives the ratio of sensitivity to the spherical and

TAB. 3.3 – Effective plastic properties identified for the square stacking. Similarly to the C_{2323} and C_{3131} components of the stiffness tensor, the H_{2323} and H_{3131} components of Hill’s tensor are not available because of the generalised plane-strain formulation used for the simulations.

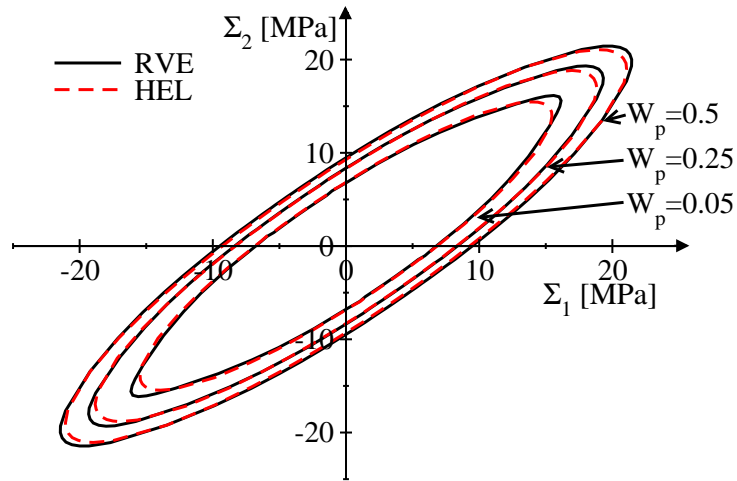
Green’s criterion		Hill’s tensor		Isotropic hardening	
C	1.8	H_{1111}	5.2	Σ_y [MPa]	10.
F	1.	H_{2222}	5.2	H [MPa]	161.
c_1	0.58	H_{3333}	-2.5	Q_1 [MPa], B_1	5.5, 97.
c_2	0.58	H_{1212}	1.	Q_2 [MPa], B_2	6.5, 2700.
c_3	0.				

deviatoric parts of the macroscopic stress respectively onto the plastic behaviour. Hence H_{1212} has also been assumed to equal to 1. The c_3 parameter, controlling the out-of-plane compressibility for a hydrostatic stress state has been set to 0 due to the negligible yielding observed along the Z-direction under a spherical load (see Fig. 3.8). In-plane pure shear, uni-axial and in-plane equi-bi-axial tensions have then been used to determine the unknown material parameters that remained. The in-plane shear stress-strain curve has been used in order to determine the C parameter. The $\underline{\underline{H}}$ components governing the anisotropy, the c_1 and c_2 parameters of the anisotropic compressibility and the hardening parameters have been determined by fitting the stress-strain responses of the uni-axial and equi-bi-axial tensions. In addition, the in-plane transverse macroscopic strain of the uni-axial tension has been used to fit the local plastic flow direction. A numerical optimisation has been carried out with the *Z-opt* module of *Z-set* by using a Levenberg-Marquardt algorithm. The constitutive model parameters identified are given in Table 3.3.

The identified HEL has been validated by applying it on a single integration point in the *Z-sim* behaviour simulation module of *Z-set* and by simulating the different uni-axial and bi-axial loading cases considered previously for the characterisation of the behaviour of the square stacking RVE. Since they have been used as reference loading cases in the fitting procedure, the uni-axial tensions and in-plane shear show a very good agreement between the mechanical responses of the RVE and those of its HEM (see Fig. 3.9). The anisotropy as well as the non-linearity of the in-plane behaviour of the RVE of the square stacking are well described by its HEL. The out-of-plane non-linear behaviour predicted by the HEL shows the right trend too, but the fit is not as good as the in-plane ones due to the different origins of the effective non-linear behaviour. Indeed, the non-linearity resulting from the architecture can be neglected in the case of the out-of-plane behaviour of the stacking which is governed by that of its constitutive material only. Thus, the supplementary non-linear isotropic hardening term (Q_2 , B_2) added to correctly capture the in-plane behaviour is detrimental to fit the out-of-plane behaviour. The bi-axial yield surfaces in the $\Sigma_1\Sigma_2$ -plane are presented in terms of iso-surfaces of density of plastic work, $W_p = \int_0^t \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{E}}}_p dt$, in Fig. 3.9 too. This measure has been chosen in order to present the



(a)



(b)

FIG. 3.9 – Comparison between the mechanical responses of the HEM identified for the square stacking and those coming from the simulations on the RVE : (a) in terms of uni-axial tensions and in-plane shear (b) in terms of the $\Sigma_1 \Sigma_2$ -in-plane surfaces of plastic work density.

results independently from the form of the HEL yield criterion. The yield surfaces show a very good agreement between the mechanical responses of both the RVE and the HEM. The uni-axial extension stress-strain responses are equal in both the X- and Y-directions and the quadratic form of the yield surfaces under a bi-axial stress state is well captured. The hardening is also well modelled owing to the two non-linear exponential hardening terms. In the case of coupled in-plane / out-of-plane stress states the HEL identified fits well the behaviour; in terms of stress state and plastic flow direction. These last results are not illustrated here for the sake of brevity.

3.2.2 Hexagonal squacking

As shown into the work of Tsuda *et al.* (2010), Hill's criterion does not suit to capture non-quadratic yield surfaces. A good agreement can be obtained when fitting the uni-axial mechanical responses only but not when considering multi-axial loading cases in the general case of cellular materials with a non quadratic behaviour (Wang et McDowell, 2005; Wang et Pan, 2006; Tsuda *et al.*, 2010). Thus, the hexagonal stacking must be modelled with a more complex yield criterion.

Formulation of the yield criterion

The macroscopic model chosen for the hexagonal stacking still follows Eqs. (3.13), (3.14) and (3.17) regarding compressibility and hardening. However, the equivalent shear stress is now governed by a general non-quadratic yield function according to Bron et Besson (2004) :

$$\Sigma_e = \left[\alpha \left((\psi^1)^{1/b^1} \right)^a + (1 - \alpha) \left((\psi^2)^{1/b^2} \right)^a \right]^{1/a} \quad (3.18)$$

with a , α , b^1 , b^2 being scalar material coefficients. Functions ψ^1 and ψ^2 obey :

$$\begin{cases} \psi^1 = \frac{1}{2} \left(|S_2^1 - S_3^1|^{b^1} + |S_3^1 - S_1^1|^{b^1} + |S_1^1 - S_2^1|^{b^1} \right) \\ \psi^2 = \frac{3^{b^2}}{2^{b^2} + 2} \left(|S_1^2|^{b^2} + |S_2^2|^{b^2} + |S_3^2|^{b^2} \right) \end{cases} \quad (3.19)$$

where the $S_{i=1-3}^{k=1-2}$ denote the principal values of two different stress deviators $\underline{\Sigma}_D^{k=1-2}$ defined as :

$$\underline{\Sigma}_D^k = \underline{\underline{B}}^k : \underline{\Sigma} \quad (3.20)$$

and where

$$\underline{\underline{B}}^k = \begin{pmatrix} (c_2^k + c_3^k)/3 & -c_3^k/3 & -c_2^k/3 & 0 & 0 & 0 \\ -c_3^k/3 & (c_3^k + c_1^k)/3 & -c_1^k/3 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2^k/3 & -c_1^k/3 & (c_1^k + c_2^k)/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6^k \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

An equivalent macroscopic plastic strain \dot{p} is defined from Eq. (3.12) as $\dot{p} = \dot{\lambda}$ assuming an associated plastic flow and Eq. (3.16) (Bron et Besson, 2004) :

$$\underline{\Sigma} : \dot{\underline{E}}_p = \Sigma_{eq} \dot{p} \quad (3.22)$$

Many other phenomenological yield functions exist in the literature (Karafillis et Boyce, 1993; Barlat *et al.*, 1991), but the one proposed by Bron and Besson has been preferred because of its general character that enables to capture a large variety of behaviours, anisotropic and quadratic or not.

3.2.3 Effective mechanical properties

The procedure used to identify the constitutive parameters of a HEL for the hexagonal stacking is similar to the one described previously in Section 3.2.1 for the square stacking. The components of the effective stiffness tensor have been identified first as already mentioned (see Table 3.2 in Section 3.1.2). The c_3 parameter in Eq. (3.14) has been set to 0 (for the same reasons as in the case of the square stacking). Concerning the shear behaviour, the c_6^1 and c_6^2 components of the $\underline{\underline{B}}^1$ and $\underline{\underline{B}}^2$ tensors have been set to 1. In-plane pure shear, uni-axial and in-plane equi-bi-axial tensions have then been used to determine the remaining unknown material parameters. The in-plane shear stress-strain curve has been used for the identification of the C parameter. The anisotropy parameters of the $\underline{\underline{B}}^1$ and $\underline{\underline{B}}^2$ tensors associated with tensions and those governing the compressibility, c_1 and c_2 , have been calibrated by fitting both the uni-axial and the equi-bi-axial tensions with the mechanical responses of the HEM. The transverse strains have also been used in order to capture the local plastic flow direction. The set of parameters identified is given in Table 3.4. It is worth noting that, because of the numerous parameters of the model, this set of values is not unique. The results of the fitting procedure obtained for the hexagonal stacking are illustrated in Fig. 3.10.

The comparison between the mechanical responses of the HEM and those obtained from the FE simulations on the hexagonal RVE shows reasonably close results (see Fig. 3.10). The bi-axial yield surfaces in the XY-plane are presented in Fig. 3.10 too, with the same graphic representation as the one used for the square stacking (see Section 3.2.1). The anisotropy as well as the non-linearity of the in-plane behaviour of the hexagonal stacking are successfully captured by the fitted HEL. However, when the load state is a mixed one, with both in-plane and out-of-plane components, the model displays some limitations due to the plastic transverse strain (not illustrated here). The results could be improved by using a multi-potential yield criterion that could be more accurate but more complex too (Cailletaud et Sai, 1995). In addition, although the non-linear hardening is fairly well modelled as a whole, in the particular case of the hexagonal stacking some difficulties are encountered when trying to capture perfectly the mechanical responses of bi-axial loading cases. An additional anisotropy might be introduced on the hardening, and not only on the yield criterion, but it would require even more parameters. Thus we have preferred to keep the aforementioned model, that contains many parameters yet and the Y-direction has been favoured in the fitting procedure for the hexagonal stacking. This is according

TAB. 3.4 – Effective plastic properties identified for the hexagonal stacking. Similarly to the C_{2323} and C_{3131} components of the stiffness tensor, the c_4^1 , c_5^1 , c_4^2 and c_5^2 components of $\underline{\underline{B}}^1$ and $\underline{\underline{B}}^2$ tensors are left undetermined because of the generalised plane-strain formulation used for the simulations.

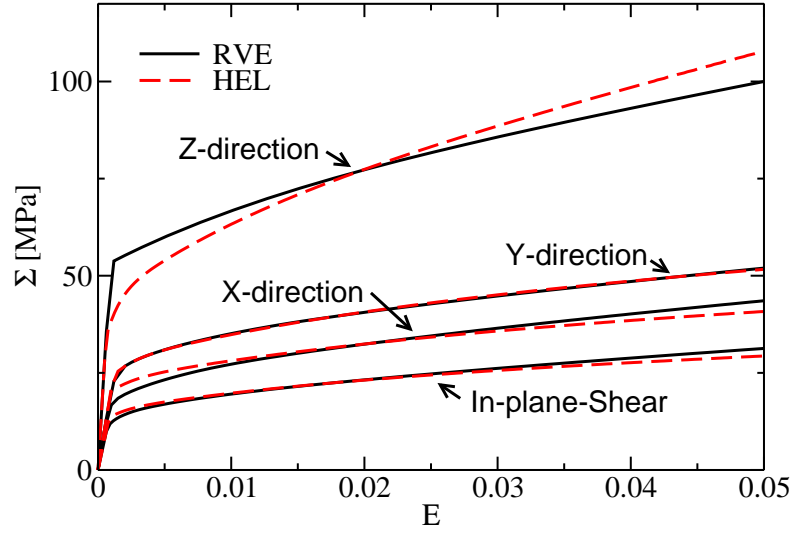
Green's criterion		Bron-Besson's tensors				Isotropic hardening	
C	2.	b^1	3.	b^2	2.	Σ_y [MPa]	33.
F	1.	c_1^1	0.81	c_1^2	0.02	H [MPa]	410.
c_1	0.69	c_2^1	0.15	c_2^2	0.85	Q_1 [MPa], B_1	19., 71.
c_2	0.63	c_3^1	0.93	c_3^2	1.31	Q_2 [MPa], B_2	4.8, 1050.
c_3	0.	c_6^1	1.	c_6^2	1.		
		a	17.4				
		α	0.524				

to the cases of validation of the identified HEL considered for the simulation of sandwich structures and described next in Section 3.3. Fig. 3.10 illustrates the fact that both the hardening evolution and the normal to the flow surface are correctly captured around the Y-axis.

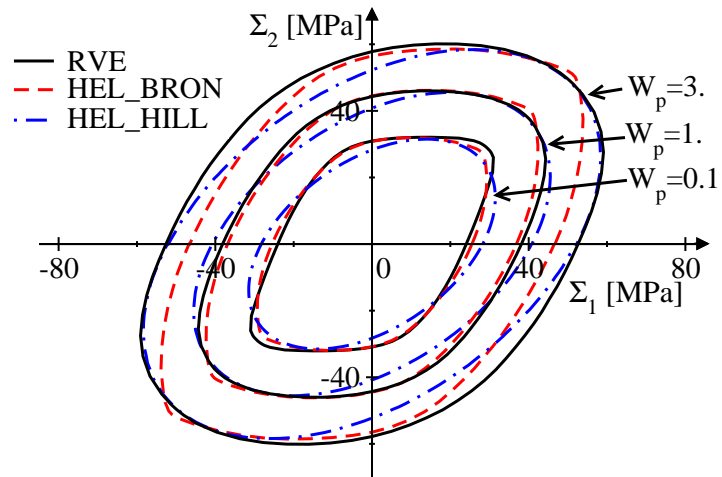
Even if the corresponding fitted properties are not given in Table 3.4 for the sake of brevity, we have tried to fit the homogenised behaviour of the hexagonal stacking by using Hill's equivalent stress rather than Bron-Besson's one, such as for the square stacking. However, the fitted yield surfaces have been added in Fig. 3.10(b). As mentioned before and according to the results of Tsuda *et al.* (2010), Hill's criterion permits to capture uni-axial tensions but is not sufficient to correctly capture the complex shape of the yield surface and the right direction of the plastic flow locally in the case of a multi-axial loading. This conclusion is all the more true that 3D loading cases are considered (the out-of-plane yield surfaces are not presented here) and that the level of cumulated plastic strain increases.

3.3 Modelling of sandwich structures

The purpose now is the evaluation of the HELs identified before for both stacking types for the modelling of finite sandwich structures. The sandwich structures considered are made of upper and lower skins with a tube stacking core in between. Reference full-scale computations on fully meshed sandwich structures have been performed first. The inhomogeneity of both the stress and strain fields in the architectures, under uni-axial normal compressive and in-plane simple shear loads, has been analysed. It has permitted to discuss the replacement of the stacking core with its HEM into the modelling. Boundary layer effects resulting from the finite size of the sandwich core on the mechanical responses of the sandwich structures are addressed for both stacking types. Similarly to the simulations on RVEs of the tubes stackings (see Section 3.1), simulations on the sandwich structures



(a)



(b)

FIG. 3.10 – Comparison between the mechanical responses of the HEM identified for the hexagonal stacking and those coming from the simulations on the RVE : (a) in terms of uni-axial tensions and in-plane shear (b) in terms of the $\Sigma_1\Sigma_2$ -in-plane surfaces of plastic work density.

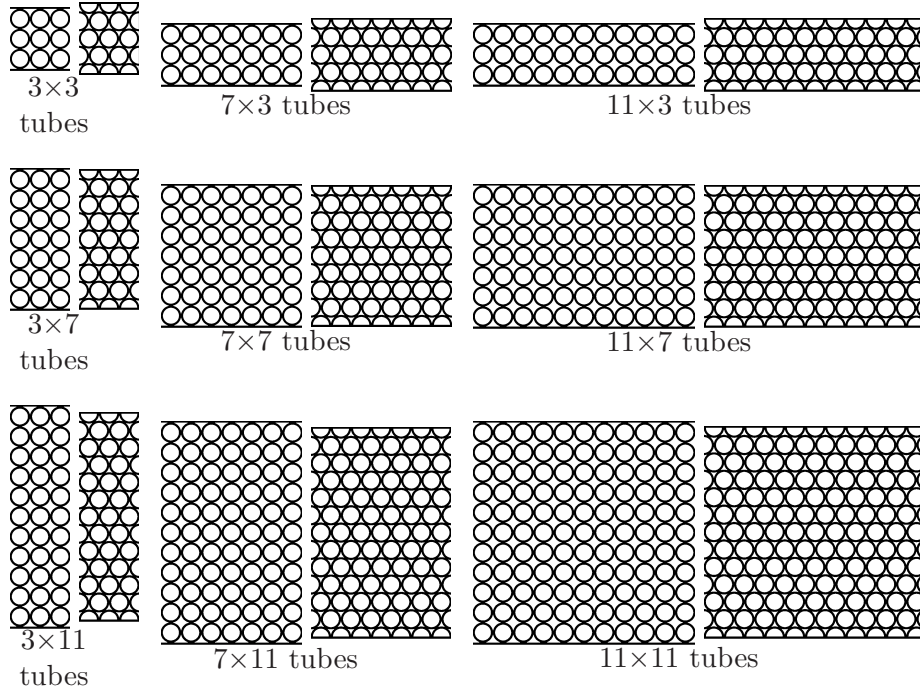


FIG. 3.11 – Illustrations of the various sandwich structures simulated in the case of a fully periodic core (square stacking on the left, hexagonal one on the right).

have been performed by using quadratic triangles and the finite-element software *Z-set*.

3.3.1 Geometries and models

Various sandwich structures have been considered for the validation step of the HELs. These different structures are summarised in Fig. 3.11. For all the simulated sandwich structures, the geometrical parameters (e.g. the tube thickness and external diameter, and the braze length) are kept constant and are the same as those used for the identification of the HELs. The thickness of the skins of the sandwich structures is fixed to 1 mm. The only parameter that changes from one architecture to another is the size of the core. It is defined by its numbers of whole tubes in the width and in the height. The constitutive material properties are also the same as those used previously for the characterisation of the infinite tube stackings. Both square or hexagonal tube stackings are considered.

In the case of the square stacking, the definition of the sandwich structures has been straightforward since the modelled structure is representative of a real one that would have been processed by stacking and brazing the tubes between two skins in one step (Marcadon *et al.*, 2012). For this structure, except for the free lateral edges, all the core can be considered as periodic. Each tube has the same number of neighbour tubes, hence the same number of braze joints equal to 4. Moreover, this number is the same as the one in the RVE of the stacking.

The case of the hexagonal stacking is a little bit more complex and two different architectures must be considered. The first architecture simulated is illustrated in Fig.

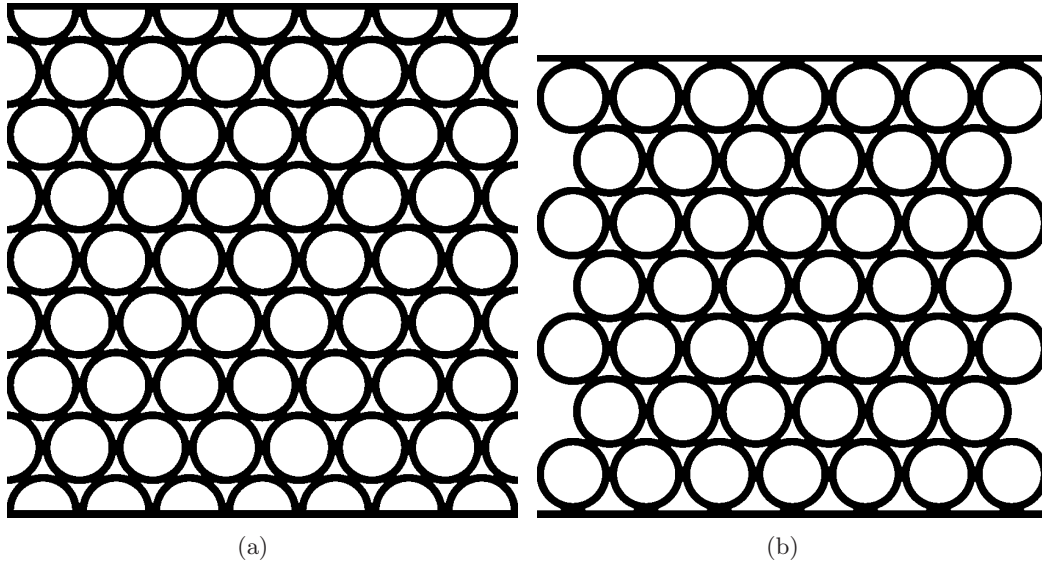


FIG. 3.12 – The two different sandwich structures studied with a hexagonal core. a) Periodic core. b) Technological geometry : compact stacking of tubes between the face skins.

3.12(a). Similarly to the square stacking, we have considered an architecture in which each tube in the sandwich contains the same number of neighbour tubes as the one in the RVE, hence the same number of braze joints that equals 6 for this stacking. It corresponds to a pseudo-periodic core with cut peripheral tubes. However, this architecture is not representative of a real structure that would have been processed in one step by stacking the tubes between the skins. Thus the second architecture made of full peripheral tubes, and illustrated in Fig. 3.12(b), has been studied too in order to discuss boundary layer effects. The peripheral tubes are not represented by the periodic unit cell of the stacking because they do not have all their neighbouring tubes, hence a lower strength is expected from this region of the core.

In parallel to this full-scale modelling, models of the sandwich structures aforementioned have been proposed by replacing their cores by their HEM. The aim was to considerably decrease computational costs in view of structural modelling. The scale transition between the cellular cores and their HEM has been made by using the macroscopic laws identified from the homogenisation approach. This modelling strategy can be applied when the load is not local (Kruch et Forest, 1998). It means that the multi-axial stress state must evolve in space more slowly than the characteristic length of the cellular architecture (or the explicit heterogeneity in a more general point of view in heterogeneous materials) in order to respect the scale separation assumption. Both the square stacking structure and the first hexagonal one (architecture shown in Fig. 3.12(a)) could be described as finite periodic cores except for the lateral faces of the sandwich structures. Thus we have assumed in both cases that the tube stacking cores could be replaced in the whole by their HEM. The lateral free surfaces of the cores have been modelled as free surfaces in the HEM-based simulations, such as in the full-scale ones.

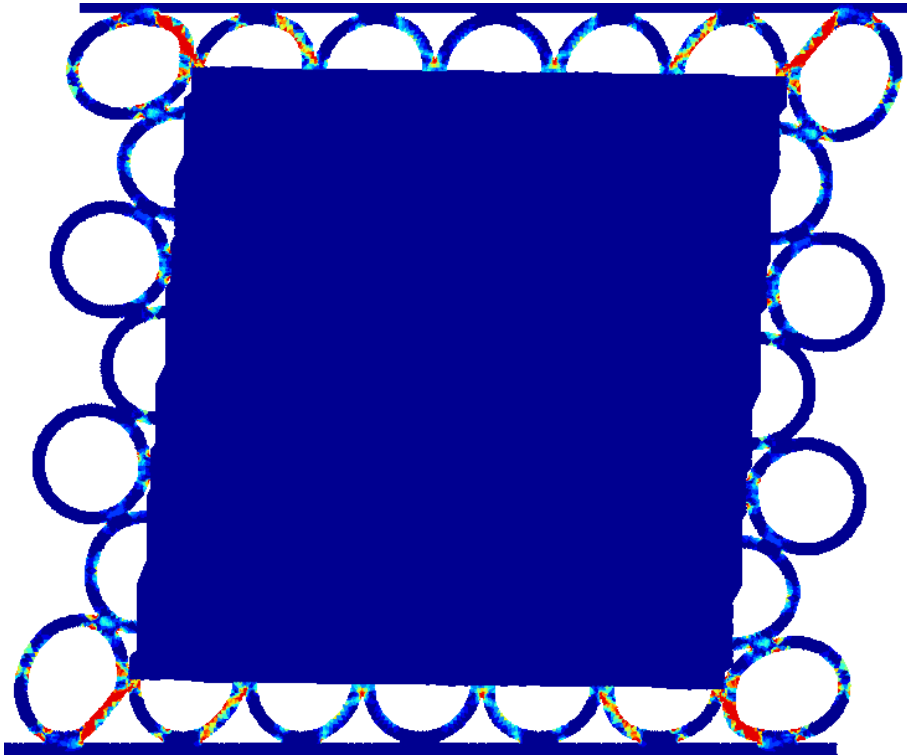


FIG. 3.13 – Illustration of the problem of the junction between the peripheral meshed half-tubes and the homogenised core in the case of the technological hexagonal specimen. This cumulated plastic strain maps is obtained in the case of an in-plane shear load for the 7×7 -hexagonal stacking core. The map is plotted in terms of integration node values.

On the contrary, when considering the technological structures for the hexagonal stacking illustrated in Fig. 3.12(b), the results obtained from the full-scale simulations have shown that the core can no longer be replaced by its HEM as a whole. It is due to the preferential collapse of the tubes in contact with the skins. Therefore, in that case the peripheral half-tubes have been kept fully meshed and only the central periodic region of the core has been replaced by the HEM. The interface between these two domains, i.e. the fully meshed half-tubes and the HEM of the core, is not continuous and the large strength difference between the constitutive material of the tubes and the HEM results in an indentation of the HEM by the tube walls. In order to avoid the occurrence of this modelling artefact, a uniform displacement condition normal to the interface between the half-tubes meshed and the HEM has been applied on several nodes of the outer edges of the HEM around the tube walls. This complementary modelling assumption is in rather good agreement with the displacement fields observed on the reference full-scale simulations. However, some steps are observed on the deformed geometries between the regions where the uniform displacement condition is applied and those where node displacements remain free. A localisation of the strain is observed at these steps but this modelling artefact remains very localised and does not affect significantly the macroscopic mechanical response of the sandwich structures. A compromise has been found in terms of the width of interface areas enabling to minimise the displacement gradient but without having a too strong indentation of the HEM. The width equals to one third of the internal diameter of the tubes on both sides of them; it corresponds to about four elements each time. Thus, between two tube wall junctions with the HEM, the central third of the edges of the HEM is deformed freely. In the case of the in-plane shear load of the cellular structures, the displacement is approximated by steps as illustrated in Fig. 3.13. More complex interface conditions exist in literature, such as the ones proposed by Panasenko (2002) and based on the decomposition of the border of the domain in several sub-domains in which higher order homogenised conditions are applied. However, for the sake of simplicity, a uniform displacement condition has been preferred here since it provides accurate enough results.

3.3.2 Results and boundary layer effects

Uniform compressive and simple shear loads have been applied on the sandwich structures by imposing displacements to their skins. Multi-axial stress states in the core of the sandwich structures are observed due to the heterogeneous interfaces between the core and both the lower and the upper skins. Moreover, in spite of the absence of internal length-scale in the HEM-based modelling developed in the present work, the macroscopic mechanical responses of the structures vary with respect to the size of their core because of the difference in mechanical strength between the skins and the core. The different mechanical responses predicted by both the full-scale modelling and those HEM-based are compared in Figs. 3.15 to 3.19. They are presented in terms of nominal stress vs. nominal strain curves in order to consider quantities that are not dependent on the size of the core of the sandwich structure.

The reference full-scale simulations have been analysed first. In the case of the square stacking they show in Fig. 3.14 a decreasing effective strength of the sandwich structure

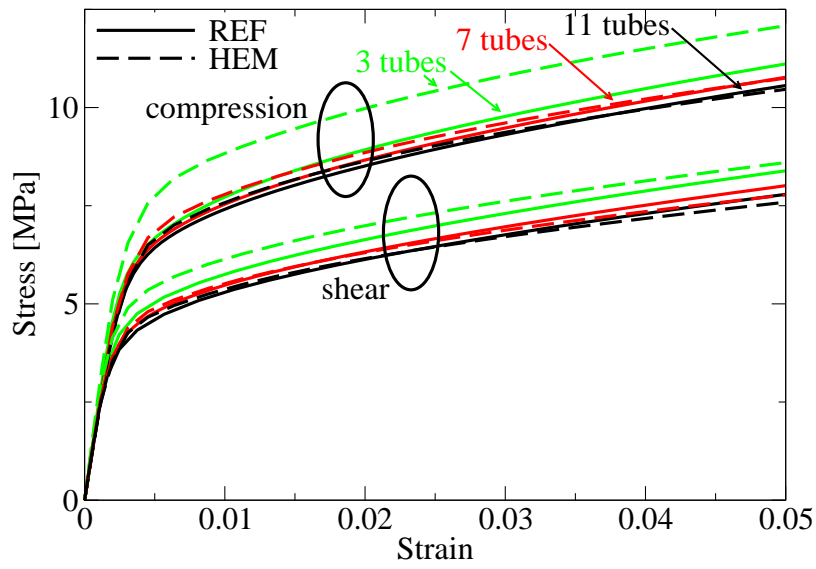
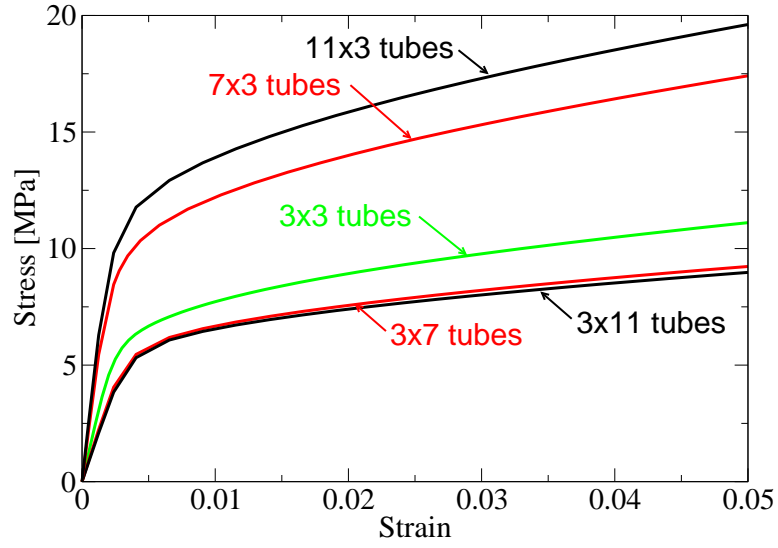
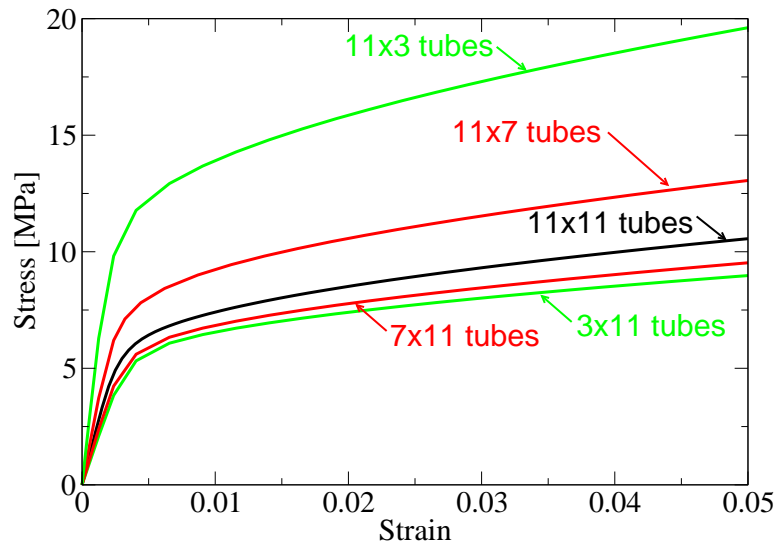


FIG. 3.14 – Comparison between the mechanical responses predicted by both the full-scale modelling and the HEM-based one in the case of the square stacking core, for both compressive and simple shear loads.



(a)



(b)

FIG. 3.15 – Stress-Strain curves predicted by the full-scale simulations for sandwich structures made of a square stacking core (compressive load). Comparison with : (a) the 3×3 -tube core (b) the 11×11 -tube core (width \times height).

with respect to an increasing core size. However, this general trend has to be reconsidered if the aspect ratio of the core (i.e. the ratio between the number of tubes in the height and in the width) equals to 1, as illustrated in Figs. 3.15(a). For a fixed height of the core, the macroscopic strength of the sandwich structure increases with the width of the core. This edge effect is the result of the containment role of the skins. In contrast, for a constant sandwich width, an increase of the number of tubes in the height of the core results in a decrease of the macroscopic strength of the sandwich due to the lateral free edges of the structure as illustrated in Fig. 3.15(b). The decrease in macroscopic strength observed for sandwich structures with an aspect ratio of 1 when increasing the core size (Fig. 3.14) suggests that the boundary layer effect that mainly governs the sandwich structure behaviour is associated with the lateral free edges. For this particular stacking, a pronounced barrel shape is observed systematically under compression as illustrated in Fig. 3.16(a). If the HEM-based simulations are now considered for the square stacking (see Fig. 3.16(b)), they show rather satisfactory results for modelling the behaviour of the sandwich structures except for the smaller core size. Fig. 3.14 shows a convergence in terms of macroscopic mechanical response between the full-scale simulations and those HEM-based with respect to the core size of the sandwich structure. Such a conclusion is true not only in the case of a compressive load, but also in the case of a simple shear one.

The case of the sandwich structures made of a hexagonal stacking core is more complex. If the sandwich structure with a pseudo-periodic hexagonal core is considered first, the various full-scale simulations performed on this structure by varying its core size lead to the same conclusions as those aforementioned for the square stacking core (see Fig. 3.18). However, Fig. 3.19(a) shows an increasing strength for the sandwich structure when increasing the core size, for an aspect ratio close to one. Therefore, in contrast to the square stacking, the boundary layer effect that mainly influences the mechanical response of the sandwich structure is the confinement effect of the skins. Indeed, the barrel shape of the deformed structure under compression remains small compared to that one observed for the square stacking core (Figs. 3.17). The mechanical responses predicted by the HEM-based simulations converge to those obtained from the reference full-scale simulations (Fig. 3.19(a)).

The hexagonal stacking with whole peripheral tubes shows very different trends due to the additional non-periodicity of the core. The observation of the deformed maps reveals a strong localisation of the collapse of the tubes that mainly occurs in the peripheral tubes. This reduces significantly the strength of the core but the effect saturates when increasing the core size (see Fig. 3.19(b)). In that particular case, replacing the whole core with its HEM leads to overestimate the mechanical response by the HEM-based modelling, as illustrated in Fig. 3.19 in the case of a compressive load. In contrast, a rather good agreement is obtained between the results predicted by both the full-scale modelling and the HEM-based one if only the periodic domain of the core is replaced with its HEM and the half-tubes at the periphery are kept meshed. This modelling strategy is a little bit less efficient to reduce computation costs and despite the very good agreement with the full-scale model for the compressive load, it shows some limitations for the simple shear load. It might be due to the use of a too simple displacement boundary condition at the interface between the peripheral tubes and the HEM to avoid its indentation. This issue

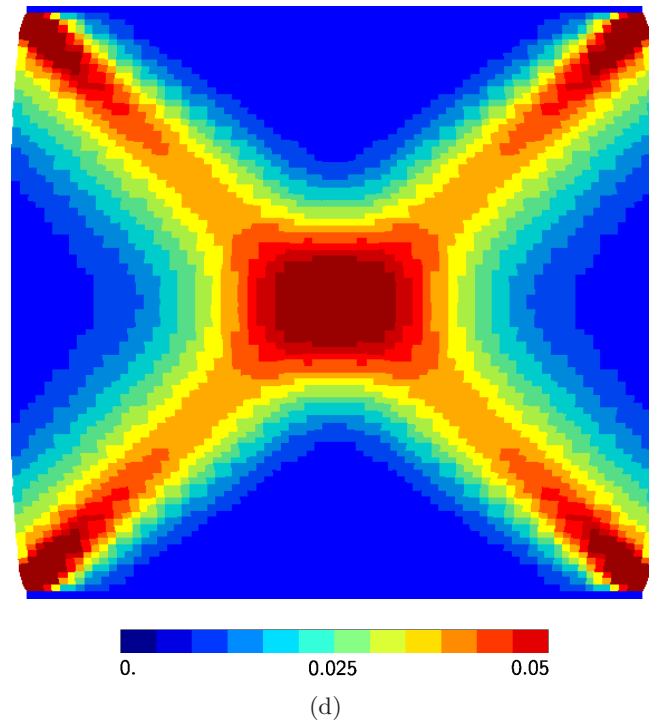
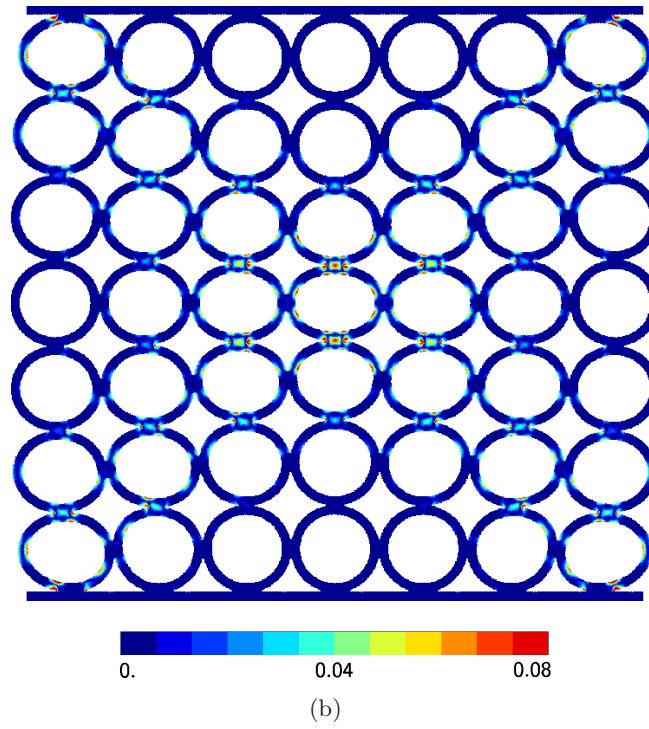
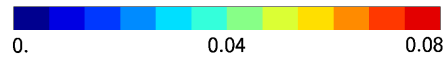
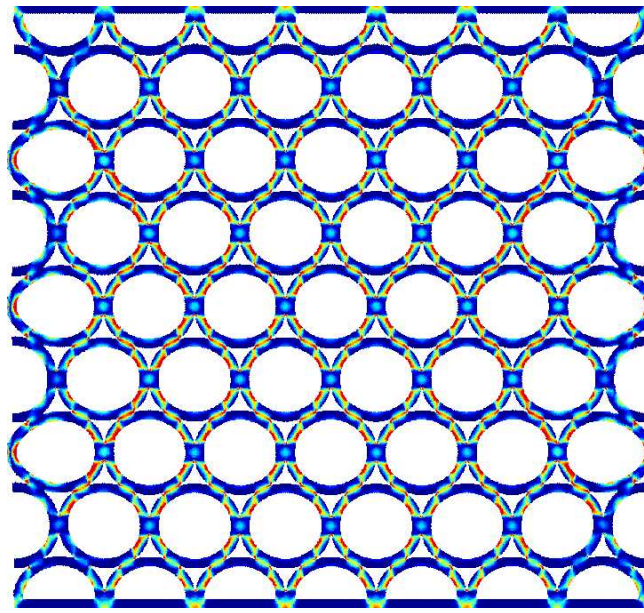
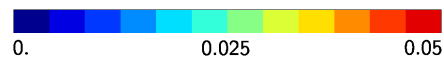
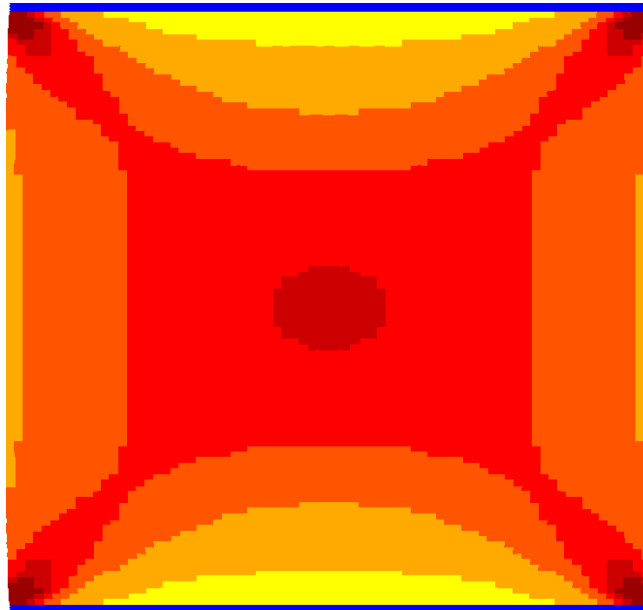


FIG. 3.16 – Deformed maps of cumulated plastic strain of square stacking sandwich structures of a 7×7 tubes; (a) Full scale model, (b) HEM model; Note that the two models have a different plastic strain measure as the full scale model has a very localised plastic strain and the HEM is homogeneous. The maps are plotted in terms of integration node values.



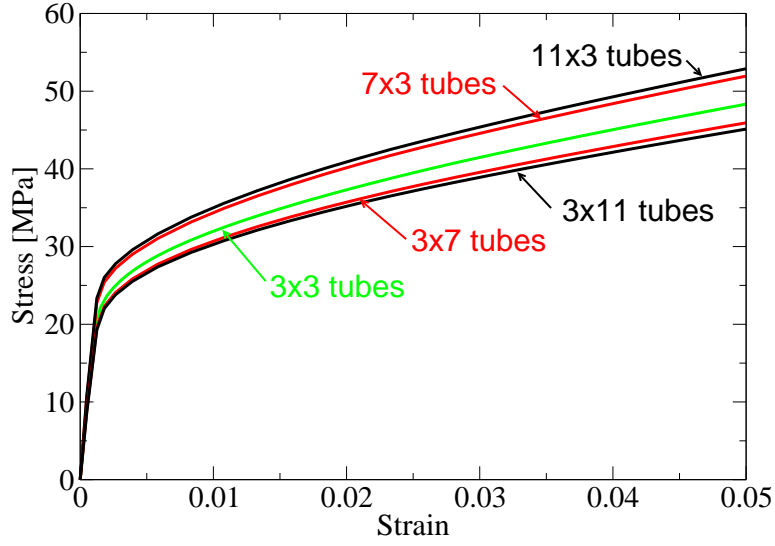
(b)



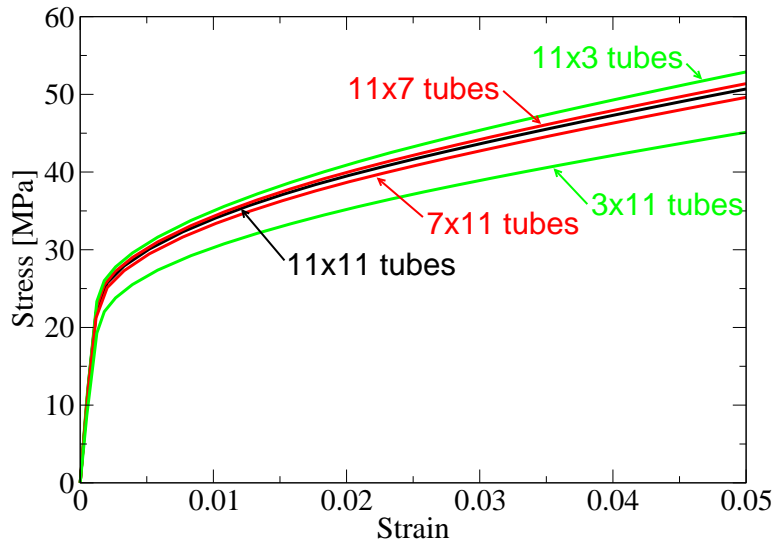
(d)

FIG. 3.17 – Deformed maps of cumulated plastic strain of hexagonal stacking sandwich structures of a 7×7 tubes ; (a) Full scale model, (b) HEM model ; Note that the two models have a different plastic strain measure as the full scale model has a very localised plastic strain and the HEM is homogeneous. The maps are plotted in terms of integration node values.

must be investigated deeper to improve our approach (Panasenko, 2002).

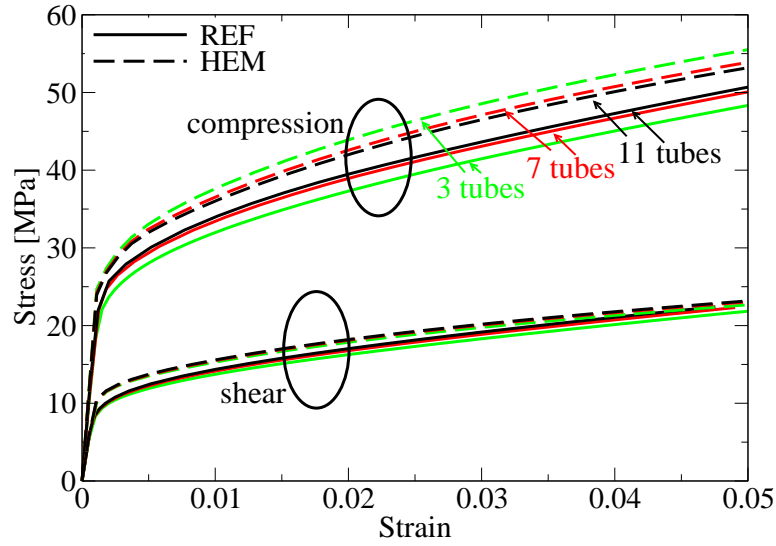


(a)

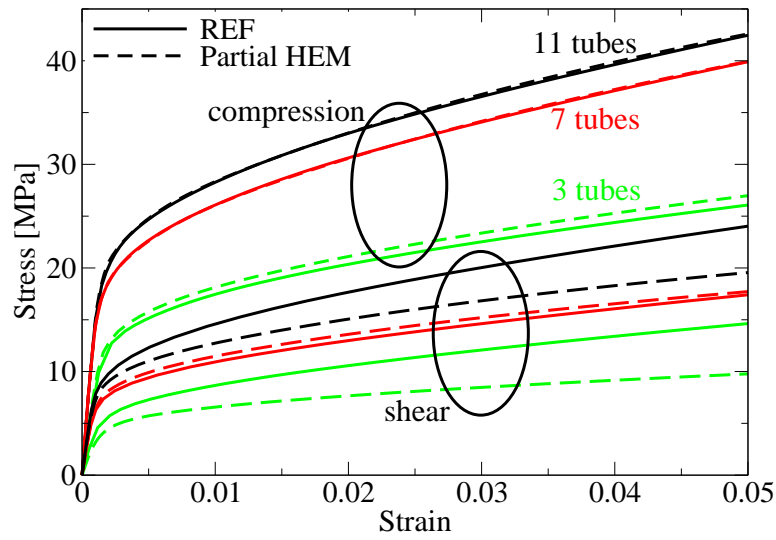


(b)

FIG. 3.18 – Stress-Strain curves predicted by the full-scale simulations for sandwich structures made of a finite periodic hexagonal stacking core (compressive load). Comparison with : (a) the 3×3 -tube core, (b) the 11×11 -tube core (width \times height).



(a)



(b)

FIG. 3.19 – Comparison between the mechanical responses predicted by both the full-scale modelling and the HEM-based one in the case of : (a) the fully periodic hexagonal stacking core (b) the non-fully periodic hexagonal stacking core for both compressive and simple shear loads.

3.4 Résultats complémentaires

Le travail de synthèse d'une publication laisse de côté certains résultats complémentaires qui sont présentés dans cette section dans l'optique d'un approfondissement de la discussion scientifique.

On présente d'abord les résultats de simulations réalisées sur le Volume Élémentaire Représentatif (VER) pour des chargements multi-axiaux. Une analyse des comportements observés est alors discutée. Puis, la Loi Homogène Equivalente (LHE) proposée dans ce chapitre est représentée plus en détail pour des chargements incluant une composante hors-plan, pour chaque type d'empilement. Dans le cas de l'empilement hexagonal, une comparaison entre le modèle proposé et un modèle plus simple est présentée. Ainsi, la comparaison critique des résultats permet de justifier le compromis sur le modèle utilisé. Finalement, un calcul en flexion 4 points sur une structure sandwich est introduit pour chaque type d'empilement afin de valider les Milieux Homogènes Equivalents (MHE) identifiés pour un cas de chargement complexe.

3.4.1 Calculs sur le Volume Élémentaire Représentatif

Chargement hydrostatique

En section 3.1, une analyse du comportement macroscopique sous chargements uni-axial et multi-axial du VER de chaque type d'empilement a été présentée. Dans cette partie, la réponse inélastique du VER est présentée pour des chargements hydrostatiques ($\underline{\Sigma} = \Sigma \underline{1}$). L'utilisation de la déformation plane généralisée permet d'appliquer un chargement sphérique. Ainsi, comme cela a été observé sur les chargements uni-axiaux (figure 3.4) dans le plan transverse aux tubes, l'architecture de l'empilement influence fortement le comportement inélastique. En effet, c'est la concentration des contraintes au voisinage des joints de brasure qui gouverne la plasticité. Dans ces zones où se localise la déformation plastique, la composante de l'écoulement hors-plan est négative (dans le cas $\Sigma > 0$ présenté ici) au premier instant de la plasticité comme on le voit sur les cartographies 3.20(b,d) (l'instant du chargement présenté ici correspond au déclenchement de la plasticité à l'échelle mésoscopique). Ce comportement résulte de l'incompressibilité du matériau constitutif dans le régime plastique et du déclenchement précoce de la plasticité par rapport à la direction hors-plan. Comme la structure n'est pas libre de chargement dans la direction hors-plan, l'écoulement se fait d'abord dans une direction opposée au chargement. Ceci se traduit par une réponse mécanique plus raide comme illustré sur les figures 3.20(a,c). Puis, lorsque la limite d'élasticité est atteinte dans d'autres zones où l'écoulement plastique est gouverné par la composante hors-plan de la contrainte, le comportement inélastique macroscopique reprend la direction d'écoulement dans le sens du chargement. On en conclut que le matériau a un comportement compressible, mais principalement dans le plan. Un écoulement plastique se développe dans la direction hors-plan mais uniquement pour un niveau de contrainte élevé après un régime de raidissement dû aux effets de l'architecture. De plus, comme l'ont observé Sanders et Gibson (2003a,b), la modélisation par éléments finis volumiques permet de modéliser des phénomènes fins dans l'architecture à l'échelle mésoscopique qui n'auraient pas été capturés par des modèles simplifiant la géométrie tels

que les modèles poutres (Papka et Kyriakides, 1999a) ou coques (Coty *et al.*, 2008).

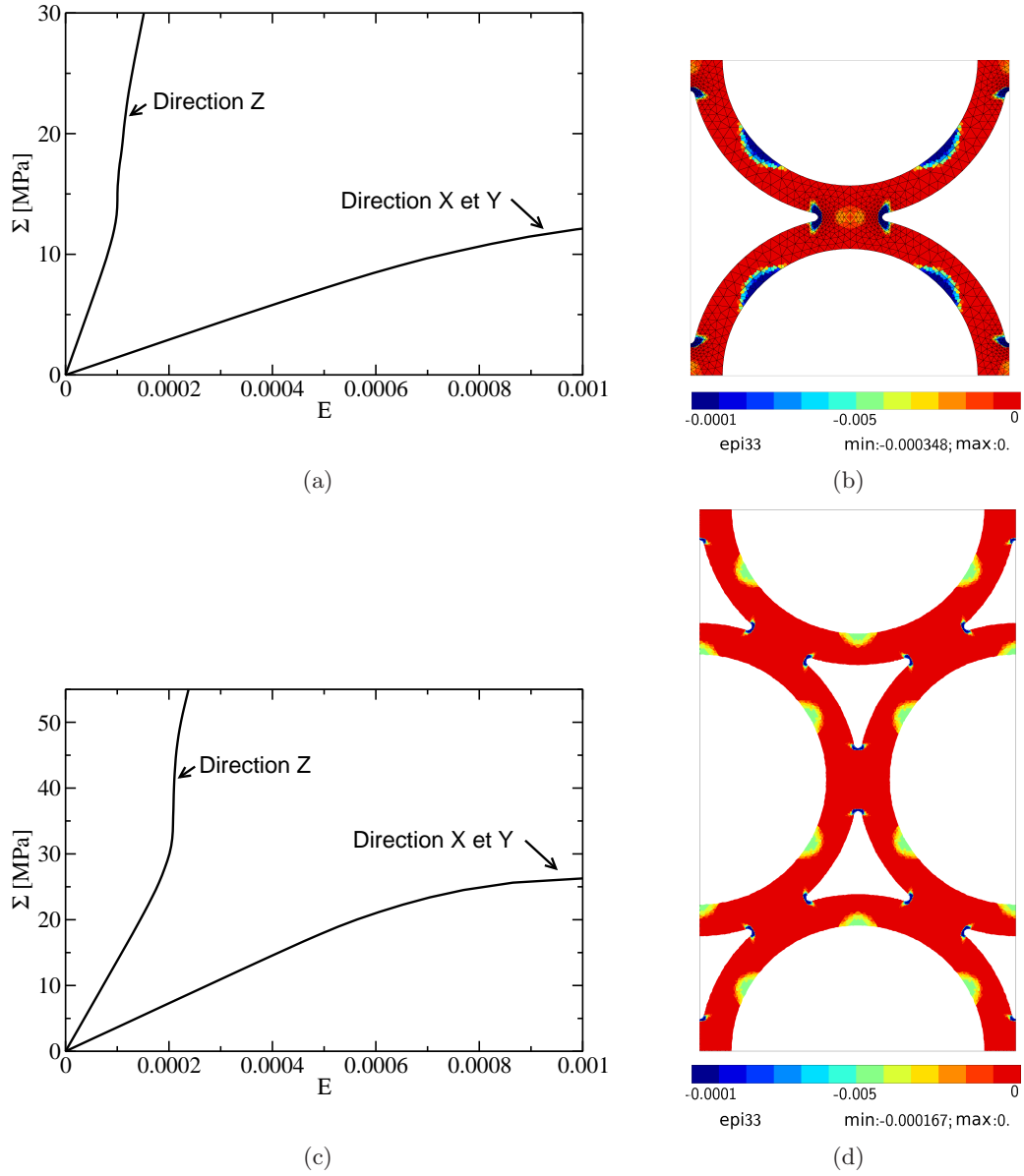


FIG. 3.20 – Chargements hydrostatiques sur le VER. courbes contraintes/déformations (a) de l'empilement carrée, (c) de l'empilement hexagonale. Cartographie de la composante hors-plan de déformation plastique (b) pour l'empilement carré à $E = 8.4 \times 10^{-5}$, (d) pour empilement hexagonal à $E = 1.7 \times 10^{-4}$

Chargements dans les plans déviatoriques

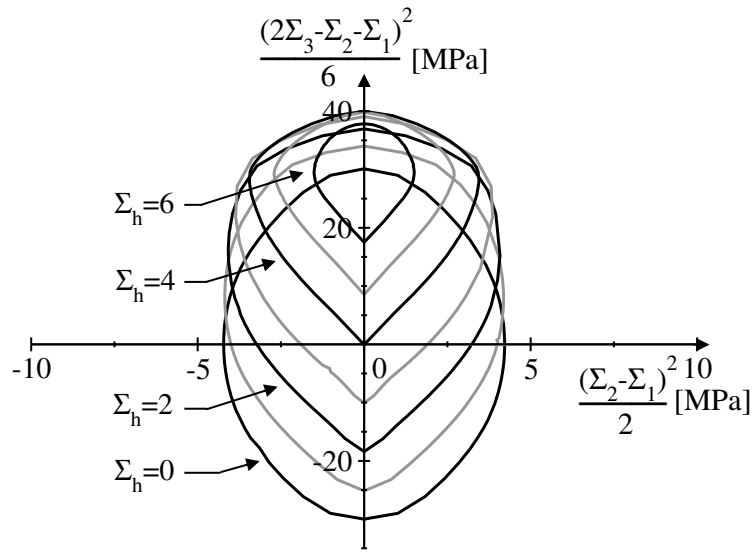
Une représentation complémentaire aux figures 3.8(a,b,c,d) est proposée pour mieux cerner la forme de l'anisotropie et la compressibilité du comportement homogénéisé du matériau cellulaire. En effet, les figures 3.21(a,b) illustrent le comportement dans le plan déviatorique pour des niveaux de contrainte hydrostatique croissant. On s'intéresse ici uniquement au seuil de plasticité. Les surfaces sont construites par un chargement hydrostatique initial puis par un balayage dans le plan déviatorique, plan de normale $(1, 1, 1)$ dans l'espace des contraintes principales. Cette méthode a été choisie pour étudier le comportement compressible du matériau cellulaire. On peut suivre des chargements non-proportionnels car on reste dans le régime élastique qui n'est pas dépendant du chemin de chargement. On fixe un seuil à $p = 0.002$, cela signifie qu'il se développe de la plasticité à l'échelle mésoscopique jusqu'au seuil macroscopique d'inélasticité, mais on la considère comme négligeable. Un balayage de l'espace des contraintes principales par des chargements proportionnels en coordonnées sphériques permettrait d'étudier l'évolution du comportement en 3D du VER. Cependant, ceci n'a pas été l'approche choisie au regard du très grand nombre de calculs que cette méthode nécessite. On retrouve dans les figures 3.21(a,b) le comportement compressible sous un chargement hydrostatique à l'endroit de l'intersection entre l'axe hors-plan de la figure et l'enveloppe de la surface de charge ; cette représentation dans le plan déviatorique donnerait dans le cas d'un matériau de type von Mises des cercles superposés. En revanche, le modèle de Green (1972) serait représenté par des cercles concentriques qui se refermeraient autour de l'axe hors-plan du graphique. Cette représentation dans le plan déviatorique permet donc une meilleure illustration de la compressibilité anisotrope du matériau cellulaire étudié.

3.4.2 Comportement inélastique multi-axial non-quadratique de l'empilement hexagonal

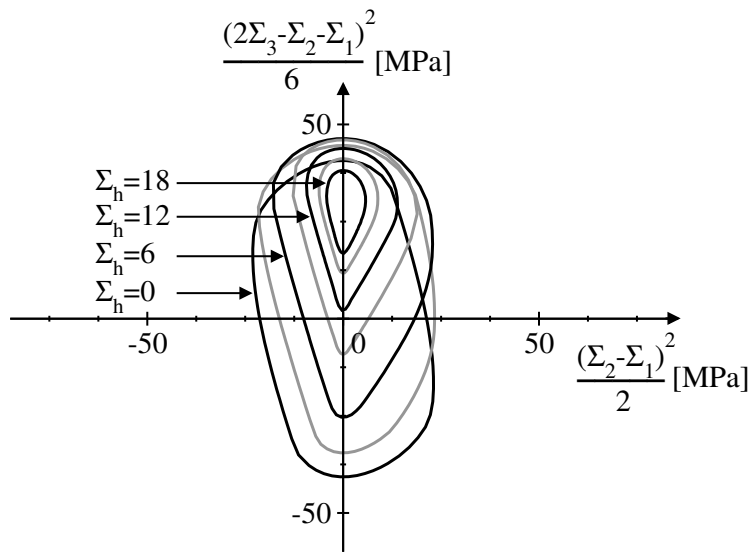
Etude de l'évolution la forme du seuil de plasticité au cours du chargement

L'une des caractéristiques du comportement inélastique effectif de l'empilement hexagonal est sa forme non-quadratique. On trouve dans la littérature des études sur l'influence de l'architecture sur le comportement des matériaux cellulaires, notamment ceux de Sanders et Gibson (2003a) sur des empilements de sphères creuses ou ceux de Tsuda *et al.* (2010) sur des tôles gaufrées. Ainsi Sanders et Gibson (2003a) ont analysé les formes des surfaces de seuil de plasticité pour différents empilements cubiques. Des comportements fortement influencés par l'architecture sont observés, un motif peut présenter un comportement inélastique quadratique et un autre peut être non-quadratique. Néanmoins, les auteurs se sont restreints à l'analyse de la limite d'élasticité.

Lors de la caractérisation du milieu infini de l'empilement hexagonal, pour de très faibles déformations, le comportement inélastique prend une forme anisotrope dans les directions du plan et anguleuse avec des faces plutôt planes. Ce comportement est non-quadratique. Pour des déformations plus importantes, la forme de la surface d'iso-valeurs de déformations plastiques équivalentes change et tend à devenir plus elliptique ; elle tend à devenir quadratique. Cette évolution est illustrée par la figure 3.22. Elle est la conséquence de la



(a)



(b)

FIG. 3.21 – Surfaces d'iso-valeurs de déformation plastique équivalente pour des chargements dans les plans déviatoriques sur le VER ; (a) de l'empilement carré, (b) de l'empilement hexagonal

direction d'écoulement de la plasticité à l'échelle mésoscopique qui est générée par la forme du champ des contraintes dans le VER. Lorsque le chargement macroscopique augmente, d'autres zones dans la phase solide, notamment dans les parois des tubes, entrent dans le régime plastique.

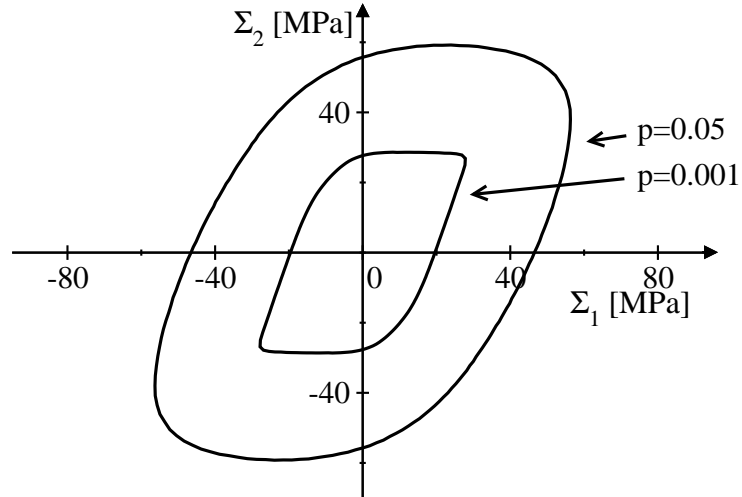


FIG. 3.22 – Surfaces d'iso-valeurs de la déformation plastique équivalente pour des chargements bi-axiaux dans l'espace des contraintes principales $\Sigma_1 - \Sigma_2$ sur le VER de l'empilement hexagonal pour de faibles et de fortes déformations macroscopiques.

Influence des paramètres géométriques sur le comportement inélastique

Grâce à une étude paramétrique, nous avons étudié l'influence des paramètres géométriques sur le comportement inélastique en modifiant l'épaisseur de paroi des tubes et la taille des joints de brasure. Le comportement inélastique multi-axial dans les directions du plan a été caractérisé pour une épaisseur de paroi et une taille de joint de brasure plus faibles que celles des cellules de l'empilement modèle utilisé tout au long de cette étude. Les géométries caractérisées sont récapitulées dans le tableau 3.4.2. On observe, pour des

	Ep : Epaisseur de paroi [mm]	L _b : Largeur du joint de brasure [mm]
Matériau modèle étudié	0.5	1.0
Variation 1	0.5	0.6
Variation 2	0.4	1.0

TAB. 3.5 – Géométries de VER de l'empilement hexagonal considérées lors de l'étude paramétrique

chargements bi-axiaux dans le plan, que la forme non-quadratique est conservée pour les deux variations de géométrie comme illustré sur la figure 3.23. On remarque que l'épaisseur de paroi a une influence importante (figure 3.23 courbes bleues), mais la forme de surface de charge reste similaire à celle de la géométrie modèle. En revanche, pour une épaisseur de paroi de tube fixée, la taille des joints de brasure modifie de manière importante non seulement le seuil de plasticité (figure 3.23 courbes rouges) mais également la forme de la surface de charge initiale. Le comportement dans la direction Y est celui qui est le plus influencé par une largeur de joint de brasure plus petite, en termes de seuil de plasticité et de normale d'écoulement. Le comportement de la géométrie rouge (épaisseur de paroi 0.5 mm, taille des joints de brasure, 0.6 mm) illustré sur la figure 3.23 est en accord avec les tendances observées précédemment (section 3.4.2) sur l'influence de l'architecture sur le comportement inélastique non-quadratique. En effet, une taille de joint de brasure qui diminue provoque une concentration de contrainte plus importante dans les joints de brasure. Ainsi, le comportement inélastique multi-axial est gouverné par l'intensité des concentrations de contrainte dans l'architecture. On en conclut que, pour l'architecture de l'empilement hexagonal, l'épaisseur de paroi influe sur le seuil de plasticité global et la taille du joint de brasure influe sur la forme du comportement inélastique de l'empilement. Nous nous sommes uniquement intéressés à une modification par paramètre géométrique pour connaître la direction et l'amplitude de leur influence sur le comportement macroscopique. De plus, nous nous sommes restreints à l'étude paramétrique de la géométrie de l'empilement hexagonal, pour caractériser le lien entre le comportement non-quadratique et la structure à l'échelle mésoscopique.

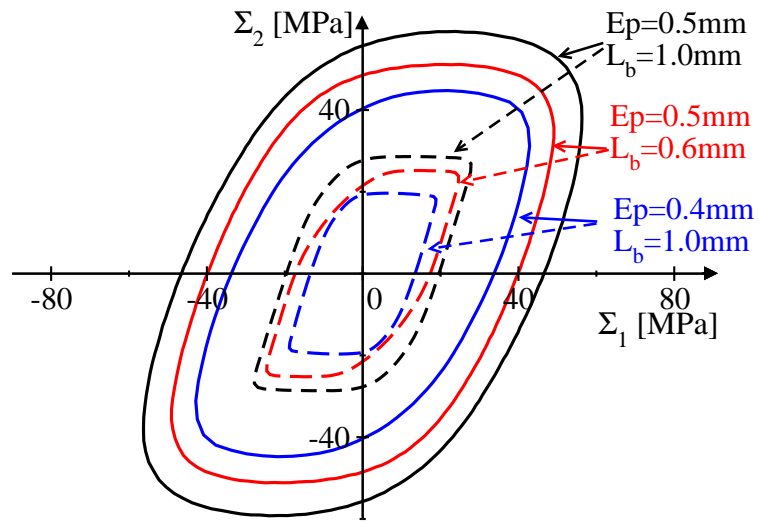


FIG. 3.23 – Surfaces d'iso-valeurs de la déformation plastique équivalente pour des chargements bi-axiaux sur les VER de 3 géométries d'empilements hexagonaux dans l'espace des contraintes principales $\Sigma_1 - \Sigma_2$ pour : de faibles ($p = 0.001$, traits en tirets) et fortes ($p = 0.05$, traits continus) déformations; E_p : épaisseur de paroi des tubes, L_b : largeur des joints de brasure

3.4.3 Lois Homogènes Equivalentes et anisotropie hors-plan

La LHE identifiée pour chaque type d'empilement a été présentée en section 3.2 mais en privilégiant le comportement dans le plan transverse des tubes. Le comportement complet est présenté ici pour des chargements multi-axiaux rendant compte des effets hors-plans, ainsi que pour des chargements en tractions-cisaillements combinés.

Chargements multi-axiaux appliqués à la LHE de l'empilement carré

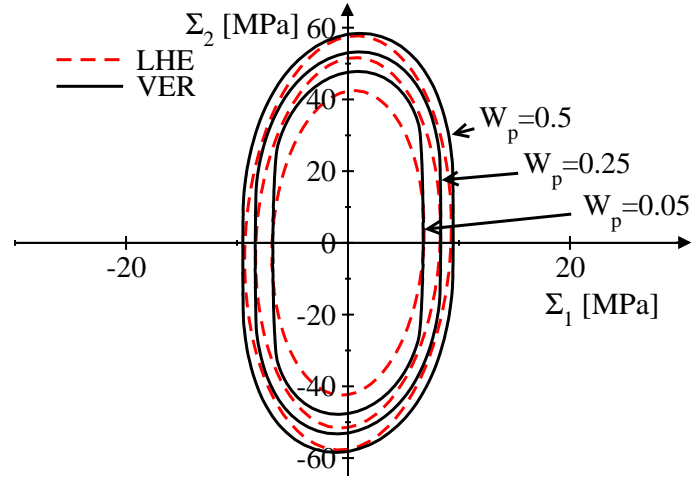
L'empilement carré a été caractérisé pour des chargements multi-axiaux, et la LHE utilisée pour modéliser le comportement effectif prend la forme d'une loi élastique orthotrope linéaire et d'un critère de plasticité compressible anisotrope quadratique de type Green (1972) (équations (3.13), 3.14 et (3.15)) avec une contrainte équivalente de Hill (1948). Le comportement a été identifié à partir des tractions uni-axiales et on observe un bon accord entre le comportement multi-axial du VER et celui de son MHE. La figure 3.24(a) compare le comportement inélastique du VER de l'empilement carré pour des chargements bi-axiaux dans la direction du plan Σ_1 (ou Σ_2) et la direction hors-plan Σ_3 . On remarque que la LHE capture correctement l'évolution de l'écrouissage mais le seuil de plasticité n'est pas bien modélisé comme cela a été mis en évidence sur la figure 3.4(a) (section 3.1). La nature différente des non-linéarités et donc des anisotropies est à nouveau montrée ici. En effet, la réponse mécanique sous chargement uni-axial dans la direction hors-plan est identique, à la fraction volumique de vide près, à celle du matériau constitutif car aucun effet d'architecture ne vient s'ajouter à l'effet du matériau constitutif.

Le comportement du MHE sous chargements combinés en traction et en cisaillement dans le plan est en bon accord avec le comportement du VER, comme illustré sur la figure 3.24(b). On remarque, comme à la figure 3.4(a) (section 3.1), que la raideur en cisaillement est plus élevée que pour la traction uni-axiale.

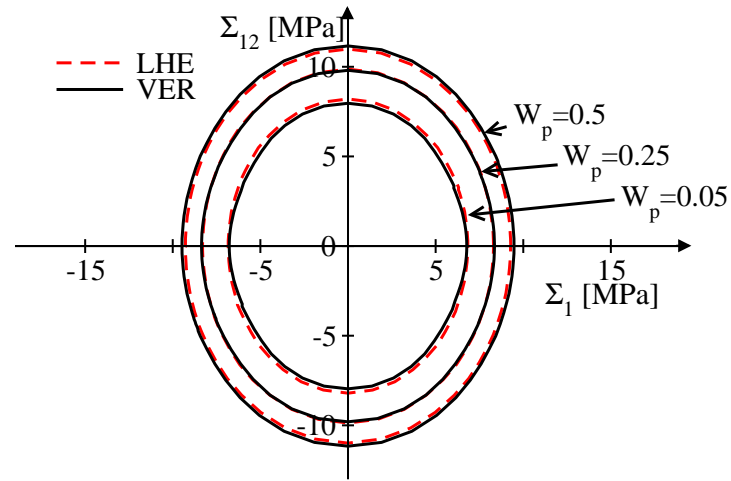
Chargements multi-axiaux appliqués à la LHE de l'empilement hexagonal

La LHE proposée en section 3.2 pour modéliser le comportement de l'empilement hexagonal est composée d'un comportement élastique linéaire orthotrope et d'un critère de plasticité anisotrope compressible non-quadratique de type Green (1972) ayant une contrainte équivalente de type Bron et Besson (2004) (équations (3.13), 3.14 et (3.18)). Cependant, en première approche le formalisme mis en oeuvre pour modéliser le comportement de l'empilement carré (Green + Hill) a été utilisé pour essayer de modéliser le comportement de l'empilement hexagonal. Ainsi, les comportements des MHE, résultant de l'identification de ces deux LHE, sont présentés sur les figures 3.25 et 3.26.

Il est important de rappeler ici l'objectif de ce travail de thèse pour expliquer le choix de la LHE qui est proposé dans les travaux soumis à publication (Ilchev *et al.*). La géométrie des structures sandwichs modèles proposées est destinée à être chargée uniformément sur toute sa profondeur, on ne s'intéresse donc pas aux chargements hors-plans. Par conséquent, une description fine du comportement dans le plan a été privilégiée. On remarque sur les figures 3.26(a,b) une mauvaise modélisation du comportement multi-axial hors-plan des MHE proposés pour l'empilement hexagonal. Les paramètres gouvernant l'anisotropie



(a)



(b)

FIG. 3.24 – Surfaces d'iso-valeurs de densité de travail plastique pour des chargements bi-axiaux sur VER et de la LHE de l'empilement carré dans l'espace des contraintes principales; (a) $\Sigma_1 - \Sigma_3$, (b) Σ_1 (équivalent Σ_2) - Σ_{12} . $W_p [N.mm^{-2}]$

ne permettent pas d'appréhender le très fort contraste entre les comportements inélastiques dans le plan et dans la direction hors-plan. On remarque sur la figure 3.25 que le comportement du modèle quadratique (Green + Hill) a une représentation médiocre du comportement dans le plan pour les critères que l'on s'est fixés pour ce travail de thèse. Mais le compromis dans les plans incluant la direction hors-plan est acceptable face aux résultats donnés par le critère non-quadratique (Green + Bron) (figures 3.26(a) et 3.26(b)). La figure 3.27 illustre le comportement inélastique du VER et le comportement de son

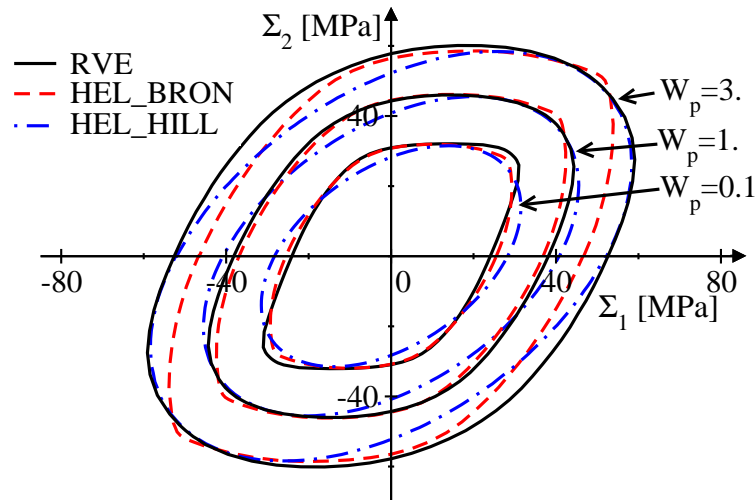
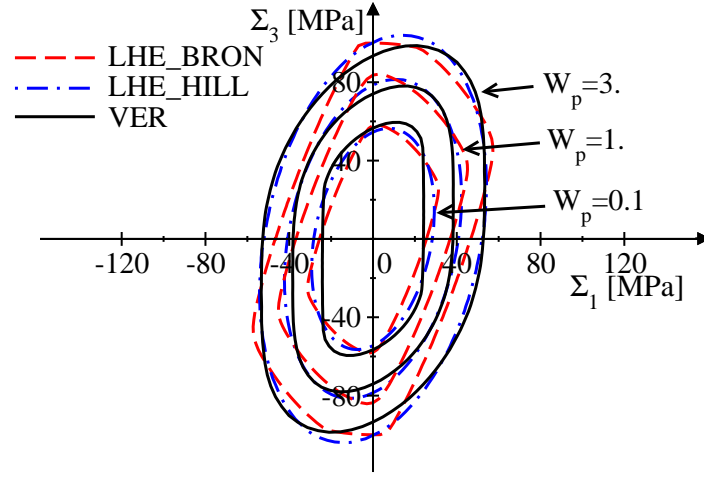
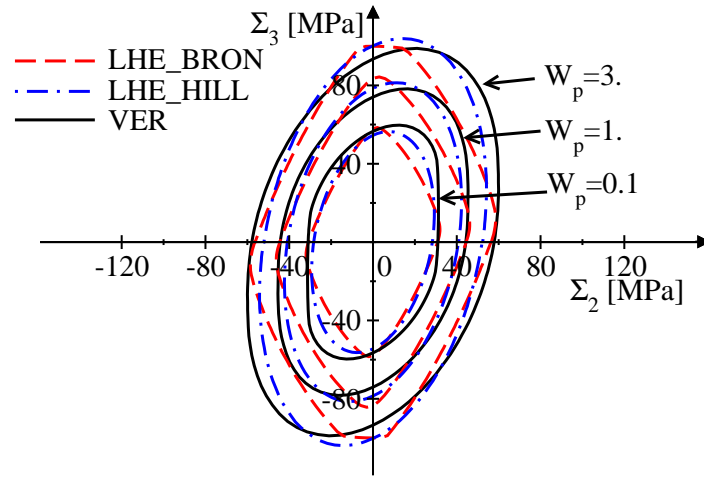


FIG. 3.25 – Surfaces d'iso-valeurs de densité de travail plastique pour des chargements bi-axiaux sur le VER et le MHE (critères de Green + Bron ou Hill) de l'empilement hexagonal dans l'espace des contraintes principales $\Sigma_1 - \Sigma_2$. W_p [$N.mm^{-2}$]

MHE (Green + Bron) correspondant pour des chargements qui combinent tractions uniaxiales et cisaillement dans le plan. On remarque que le comportement du VER est fortement influencé par la direction du chargement uni-axial. La figure 3.27(a) montre une forme d'écoulement gouvernée par la composante maximum du chargement en contrainte bi-axiale (type norme ∞ : $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$). En effet, la surface a des faces plutôt droites horizontales ou verticales, indiquant que l'écoulement a une composante bien plus grande que l'autre. Ainsi, on en déduit que le champ de contrainte à l'échelle mésoscopique est différent entre le chargement dans la direction X et le cisaillement dans le plan du VER. En d'autres termes, les zones où se développe la plasticité à l'échelle mésoscopique sont différentes pour ces deux chargements. En revanche, la figure 3.27(b) montre une forme d'écoulement gouvernée par l'addition des composantes (type norme 1 : $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$) dans ce cas. En effet, la surface a des faces plutôt obliques, indi-



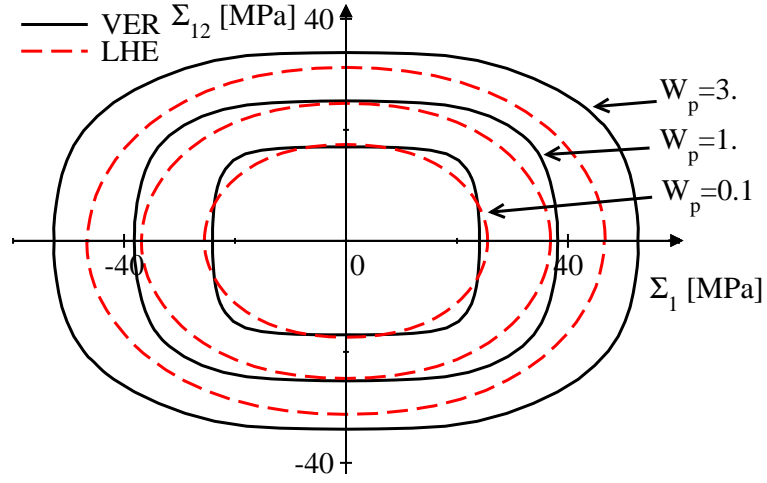
(a)



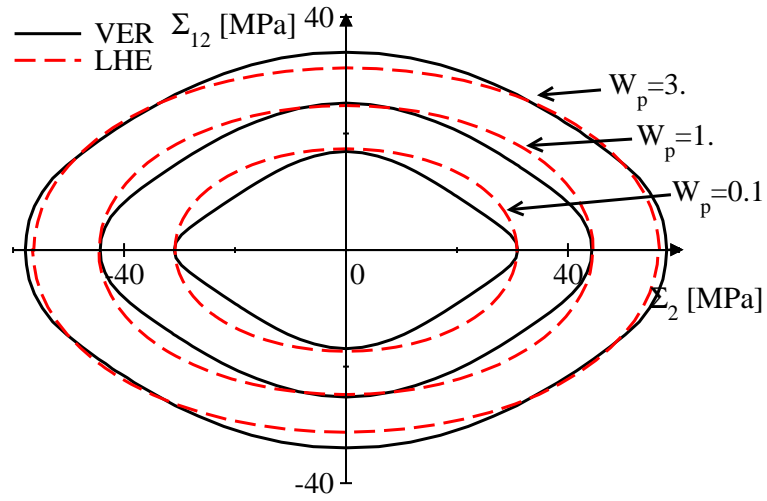
(b)

FIG. 3.26 – Surfaces d’iso-valeurs de densité de travail plastique pour des chargements bi-axiaux sur le VER et le MHE (critères de Green + Bron ou Hill) de l’empilement hexagonal dans l’espace des contraintes principales ; (a) $\Sigma_1 - \Sigma_3$, (b) $\Sigma_2 - \Sigma_3$. W_p [$N.mm^{-2}$]

quant que, dès que le chargement est bi-axial, l'écoulement se fait avec des composantes de valeurs similaires dans le plan. On peut en déduire que les concentrations de contrainte se développent dans l'architecture dans les mêmes zones pour les deux chargements, et que le chargement uni-axial dans le direction Y provoque un fort cisaillement des joints de brasures. La LHE proposée (Green + Bron) a une forme quadratique dans ce plan. En effet, les paramètres matériaux identifiés qui modélisent le comportement en cisaillement, en particulier les paramètres de puissance des deux contraintes équivalentes dans le critère de Bron ($b_1 = 3.$ et $b_2 = 2.$) des équations (3.18) et (3.19) donnent une forme proche de l'ellipse. Le MHE modélise donc mal les chargements combinés de traction/cisaillement comme le montre les figures 3.27(a,b).



(a)



(b)

FIG. 3.27 – Surfaces d'iso-valeurs de densité de travail plastique pour des chargements bi-axiaux sur le VER et de la LHE (critères de Green + Bron) de l'empilement hexagonal dans l'espace des contraintes principales; (a) $\Sigma_1 - \Sigma_{12}$, (b) $\Sigma_2 - \Sigma_{12}$. W_p [N.mm⁻²]

Loi Homogène Equivalente modélisant l'évolution de la surface d'écoulement

L'évolution de la surface des iso-valeurs de déformation plastique équivalente observée sur la figure 3.22 n'est pas correctement modélisée par un écrouissage isotrope qui ne prend en compte que des dilatations homothétiques des surfaces de charge. Comme décrit dans la section 3.4.2, le comportement multi-axial inélastique évolue avec la déformation. Ces changements de forme induisent une modification de la direction et de l'intensité de l'écoulement plastique. Ainsi, pour une description plus fine des normales d'écoulement et des seuils de plasticité au cours de la déformation, une évolution des paramètres du modèle en fonction de la plasticité cumulée permet de rendre compte du changement de forme du comportement inélastique multi-axial de la LHE. Nous avons choisi de faire porter l'influence de la plasticité sur le paramètre de puissance de la LHE a de l'équation (3.18), car c'est celui qui gouverne principalement la forme quadratique ou non-quadratique du comportement de la LHE identifiée. La loi d'évolution proposée prend la forme suivante :

$$a(p) = (a_s - a_0)(1 - \exp(-\tau p)) + a_0 \quad (3.23)$$

où a_0 et a_s sont respectivement les valeurs initiale et saturée du paramètre et τ est la vitesse d'évolution. La figure 3.28 montre la valeur du paramètre a en fonction de la plasticité cumulée pour $a_0 = 17.5$, $a_s = 2$, $\tau = 50$. Les conditions de convexité du critère sont respectées si la loi d'évolution sature au dessus de la valeur seuil $a = 1$ établie par Bron et Besson (2004). On propose de faire converger a vers 2 pour tendre vers une

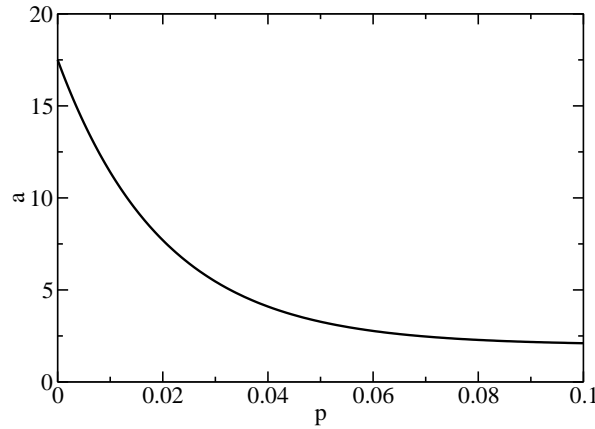


FIG. 3.28 – Loi d'évolution du paramètre de puissance du critère a en fonction de p la plasticité cumulée de la LHE proposée ; $a_0 = 17.5$, $a_s = 2$, $\tau = 50$

forme quadratique du critère. On garde tous les autres paramètres de la LHE identifiée constants (tableau 3.4, section 3.2). On remarque sur la figure 3.29 que le seuil de plasticité est identique à la loi non modifiée car $a(0) = a_0$, il est donc non-quadratique. Pour une densité de travail plastique $W_p = 3 \text{ N.mm}^{-2}$, on observe une forme qui tend vers un

comportement quadratique. Les normales d'écoulement sont mieux modélisées par cette LHE modifiée, notamment pour des chargements bi-axiaux. Ce résultat n'a pas fait l'objet d'une nouvelle procédure d'identification des paramètres. Ainsi, il s'agit de proposer une voie d'amélioration de la modélisation du comportement macroscopique pour un matériau possédant cette caractéristique. En effet, ce degré de liberté supplémentaire permettrait d'identifier à nouveau les paramètres d'anisotropie qui étaient actuellement contraints de modéliser l'anisotropie initiale et son évolution. La remarque est également valide pour les paramètres d'écrouissage identifiés. Il faudrait alors identifier les paramètres matériau sur un nombre plus grand de chargements bi-axiaux dans le plan pour capturer les évolutions de la normale d'écoulement, comme illustré sur la figure 3.30.

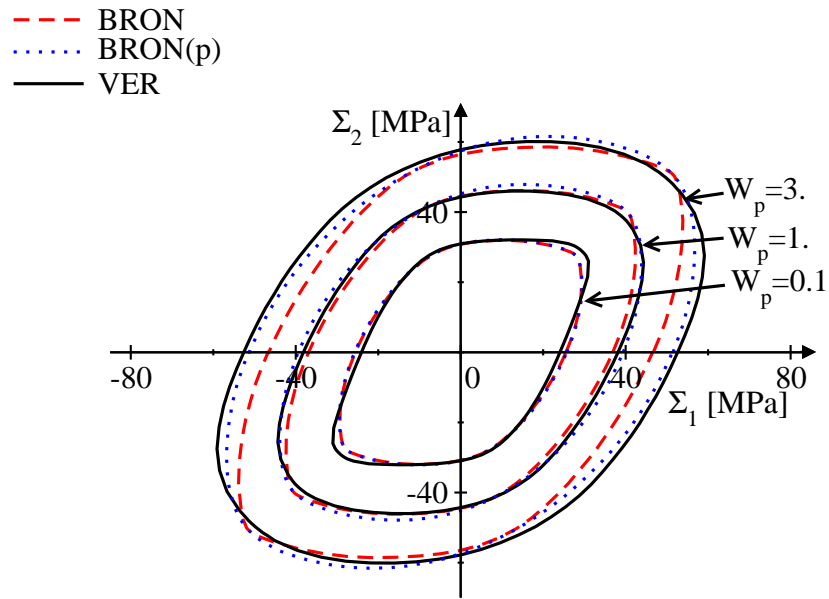


FIG. 3.29 – Surfaces d'iso-valeurs de densité de travail plastique pour des chargements bi-axiaux sur la VER et la LHE (Green + Bron fonction de la plasticité cumulée) l'espace des contraintes principales $\Sigma_1 - \Sigma_2$ pour de faibles et importantes déformations. $W_p [N.mm^{-2}]$

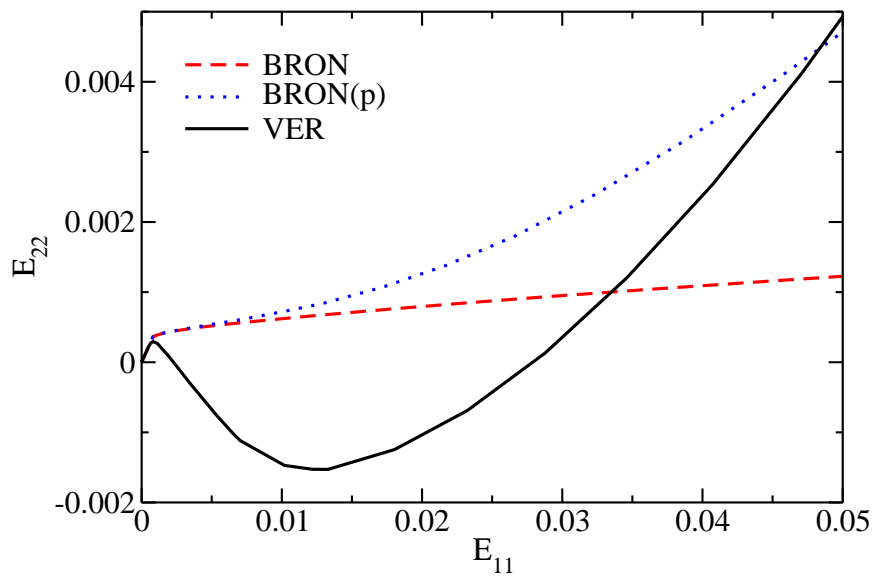


FIG. 3.30 – Déformations du plan sous un chargement bi-axial à 34 degrés sur le VER et les LHE (Green + Bron) et (Green + Bron modifié)

3.4.4 Modélisation de structures sandwichs sollicitées en flexion

Dans la section 3.3, des structures sandwichs finies de tailles de cœur variables ont été étudiées. Les deux types d'empilement ont été modélisés avec une peau de 0.5 mm et avec un cœur variant en largeur et en hauteur de 3, 7 et 11 tubes. Par la suite, une comparaison de ces calculs de référence avec les modèles homogénéisés a été réalisée afin de valider le MHE. Les structures sandwichs ont été sollicitées en compression uniforme normale aux peaux ainsi qu'en glissement. Ces chargements génèrent un état de contrainte proche des cas de chargement utilisés pour identifier les LHE. Cependant, l'état de contrainte est multi-axial dans le cœur du fait de l'hétérogénéité entre le cœur et les peaux. Ainsi, l'analyse de la convergence de la réponse macroscopique des structures sandwichs a permis de valider les LHE identifiées.

On propose ici d'étudier un cas de chargement non-uniforme afin d'obtenir des champs multi-axiaux plus riches et plus complexes dans le cœur qui ne favorisent pas ceux utilisés pour l'identification des LHE. Une flexion 4 points est appliquée à des structures sandwichs car ce cas de chargement sollicite la structure et donc le cœur de manière très hétérogène. Les symétries du problème permettent de ne modéliser qu'une moitié de la géométrie. De plus, une idéalisation de l'appui est choisie en appliquant un déplacement vertical sur une petite zone des peaux. Ces conditions aux limites sont appliquées de manière identique aux modèles de référence et avec MHE. On modéliser pour les deux types d'empilement une structure sandwichs de 32×5 tubes avec des peaux de 1 mm d'épaisseur. Les figures 3.31(a,b) et 3.32(a,b) montrent les cartographies de la déformation plastique cumulée dans le calcul de référence entièrement maillé et le calcul avec le MHE pour les deux types d'empilement. On observe une localisation de la déformation semblable entre les deux modélisations.

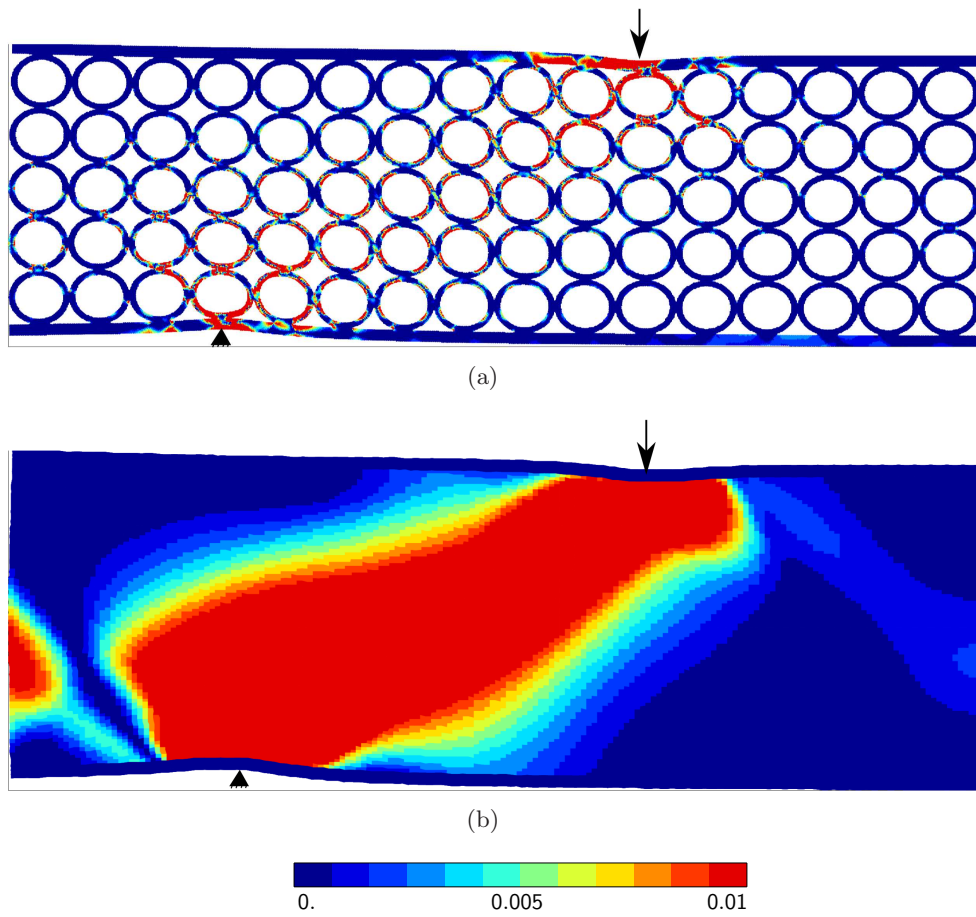


FIG. 3.31 – Cartographie de la déformation plastique cumulée résultats d'un calcul de flexion sur une structure sandwich (32×5 tubes) avec un cœur constitué d'un empilement carré; déplacement de l'appui supérieur égale à 2 mm; condition de symétrie à droite du modèle. (a) calcul de référence, (b) calcul en remplaçant le cœur par son MHE

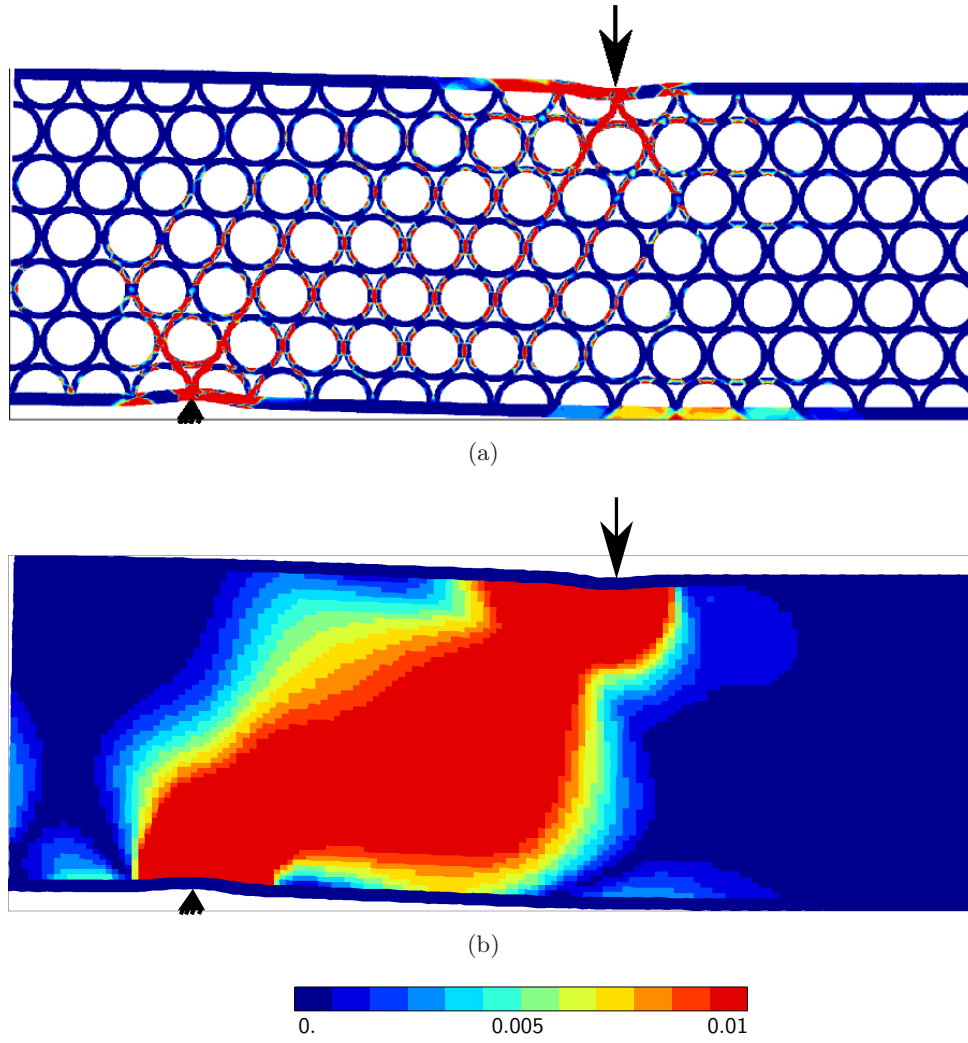
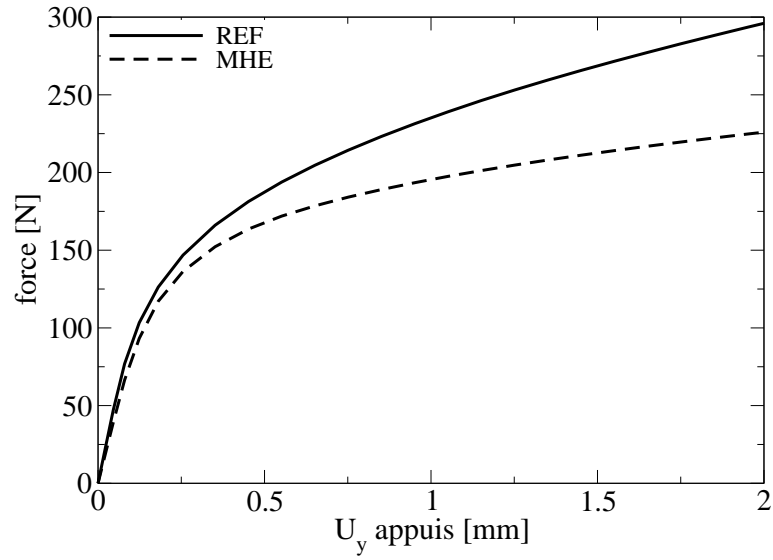


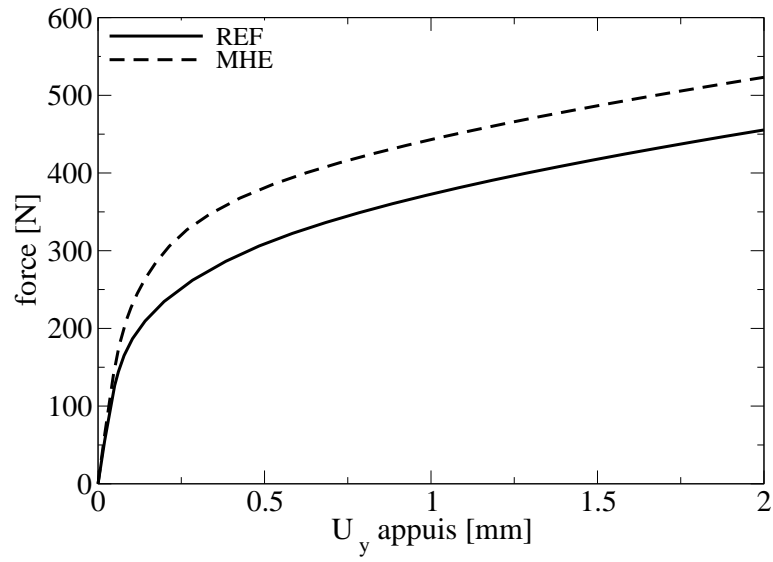
FIG. 3.32 – Cartographie de la déformation plastique cumulée résultats d'un calcul de flexion sur une structure sandwich (32×5 tubes) avec un cœur constitué d'un empilement hexagonal ; déplacement de l'appui supérieur égale à 2 mm ; condition de symétrie à droite du modèle. (a) calcul de référence, (b) calcul en remplaçant le cœur par son MHE

Les réponses macroscopiques sont présentées sur la figure 3.33. La modélisation de référence des structures sandwichs sollicitées en flexion est comparée à la modélisation avec le MHE. Ainsi, on remarque sur la figure 3.33(a) que, pour l'empilement carré, le modèle avec MHE sous-estime la réponse macroscopique avec une erreur de l'ordre de 20% en fin de chargement. La réponse est différente dès le régime élastique alors que les chargements uniformes appliqués aux structures sandwichs avec empilement carré ont donné des réponses mécaniques proches de celles du calcul de référence (figure 3.14). Dans le cas de la flexion, l'écart observé avec la modélisation avec MHE peut s'expliquer par le chargement local sous les appuis qui provoque des déformations non-homogènes dans les tubes du cœur sous-jacents aux peaux. En effet, nous utilisons un MHE du premier ordre, qui fait l'hypothèse de séparation stricte des échelles. En outre, un chargement macroscopique induisant une sollicitation dans le cœur ayant une longueur d'onde du même ordre de grandeur que la taille caractéristique de la mésosturcutre, provoque des modes de déformations d'ordre supérieur des tubes du cœur de la structure sandwich. Par conséquent, le MHE ne modélise pas de manière satisfaisante ce type de chargement.

La modélisation de la flexion de la structure sandwich avec empilement hexagonal donne également une erreur importante, de l'ordre de 10% en fin de chargement. La stratégie de modélisation avec un MHE surestime la réponse mécanique comme observé précédemment sur la figure 3.19 (section 3.3 pour des chargements uniformes. Une modélisation avec un MHE sur la base de la loi de comportement proposée en partie 3.4.3, rendant compte de l'évolution du comportement inélastique en fonction de la plasticité, ne donne pas un meilleur résultat. D'une part, car les déformations sont faibles et d'autre part, parce que l'état de contrainte multi-axial est globalement dominé par le cisaillement et la compression uni-axiale dans la direction Y, qui ne sont que peu modifiés par l'évolution de la LHE. La comparaison des réponses mécaniques en compression et en glissement entre les structures sandwichs de référence et les modèles avec leur MHE montre une surestimation faible du comportement par l'approche avec MHE. On a d'abord observé, dans le cas du chargement en flexion de la structure sandwich en empilement carré, une sous-estimation de la réponse mécanique (figure 3.33(a)). Ensuite, on remarque que la réponse en flexion de l'empilement hexagonal est surestimée. Ainsi, comme nous n'avons étudié qu'une seule géométrie de structure sandwich, on ne peut pas conclure sur l'origine de l'écart entre la modéliser de référence et celle avec MHE. Une étude paramétrique complète serait nécessaire afin de déterminer l'influence des effets des chargements locaux et des effets de taille. Cependant, ce cas de validation montre un accord raisonnable compte tenu de la forme des champs à l'échelle mésoscopique.



(a)



(b)

FIG. 3.33 – Réponses mécaniques de structures sandwichs en flexion 4 points, courbes force/déplacement au niveau de l'appui supérieur; (a) empilement carré, (b) empilement hexagonal

3.5 Conclusion

Le travail présenté ici a consisté à modéliser des structures sandwichs de tailles finies par une technique d'homogénéisation périodique. Dans cette optique, des structures sandwichs modèles, à base d'empilements carrés et hexagonaux de tubes ont été étudiés pour des chargements en compression normales et des glissements dans le plan. Ces sollicitations ont été appliquées afin d'étudier les effets de taille et l'influence des effets de bords, et dans le but de valider l'approche par homogénéisation utilisée. En outre, ces chargements se sont révélés intéressants d'un point de vue mésoscopique car la déformation macroscopique appliquée aux structures sandwichs provoque un état de contrainte multi-axial à cause de l'hétérogénéité entre le cœur et les peaux et des effets de bord.

Dans un premier temps, les VER des empilements carrés et hexagonaux de tubes ont été étudiés en détail pour des cas de chargements multi-axiaux à l'aide d'un modèle éléments finis sur une cellule périodique. Ces simulations jusqu'à des déformations macroscopiques de l'ordre de 5% ont montré un comportement très différent entre les deux types d'empilement en termes d'anisotropie et de forme des surfaces de charge. L'architecture joue un rôle significatif sur le comportement, notamment les joints de brasure qui déterminent la forme du champ de contrainte à l'échelle mésoscopique. Les calculs ont également mis en avant la forte anisotropie entre les directions du plan et la direction hors-plan pour ce type de matériau cellulaire extrudé. Les travaux de caractérisation du VER ont été menés en 3D, mais l'effort principal a été mené sur l'analyse des chargements dans le plan.

Une LHE a été identifiée sur la base des résultats de la caractérisation multi-axiale pour chaque empilement. L'empilement carré a ainsi été modélisé par une loi de comportement non-linéaire compressible anisotrope. L'accord entre le comportement du VER et celui du MHE est très satisfaisant pour tous les cas de chargement à l'exception des chargements multi-axiaux comportant une composante hors-plan. En effet, l'anisotropie n'est pas de même nature dans la direction longitudinale des tubes, sa modélisation nécessiterait de prendre en compte cette différence dans le modèle. L'ajout d'un deuxième critère de plasticité isotrope modélisant le comportement hors-plan permettrait de palier cette limitation de la LHE proposée.

Une LHE a également été identifiée pour l'empilement hexagonal. Son comportement non-quadratique est modélisé par un critère de plasticité proposé par Bron et Besson (2004) combiné à un terme de compressibilité anisotrope. La modélisation du seuil de plasticité dans le plan est satisfaisante, ce qui est un facteur important pour la modélisation de la tenue structurale considérée par la suite. L'évolution du comportement inélastique est également importante pour l'estimation de l'énergie dissipée lors de chargements multi-axiaux. Les cas de chargements auxquels nous nous sommes intéressés dans ce travail sont uniquement dans le plan. Ainsi, la LHE identifiée modélise avec succès le comportement dans le plan, mais on sait que la modélisation n'est pas satisfaisante dans la direction hors-plan. Une LHE quadratique peut être utilisée pour modéliser toutes les anisotropies observées avec un bon accord sur les seuils de plasticité pour des chargements uni-axiaux. Néanmoins, dans ce cas, les normales d'écoulement sont mal décrites et pour des chargements multi-axiaux l'accord avec le comportement du VER n'est pas satisfaisant, en termes de seuil de plasticité et de direction d'écoulement.

Les LHE proposées ont ensuite été utilisées pour la modélisation de structures sandwichs constituées d'un cœur cellulaire entre deux peaux. Le cœur a alors été remplacé par son MHE sur la base des LHE identifiées pour chaque motif d'empilement. Une étude de l'effet de taille et des effets de bords a été menée et a montré une faible sensibilité à la taille de la structure sandwich pour des chargements uniformes. La comparaison entre les calculs de référence et les modélisations avec le MHE a donné de bons résultats pour toutes les configurations étudiées. En effet, pour des tailles de sandwichs variant de 3×3 à 11×11 les tendances et les réponses mécaniques sont bien modélisées. L'empilement hexagonal a été étudié pour deux géométries de structures sandwichs : celle avec un cœur périodique fini (intéressant pour la mise en place de la méthode) et celle avec un empilement compact de tubes entiers dans le cœur (tel qu'il est fabriqué). La modélisation avec MHE des structures sandwichs avec un cœur en empilement hexagonal dit technologique a montré certaines limitations, notamment dans le cas de chargements en glissement. Finalement, la modélisation à l'aide de la technique de l'homogénéisation atteint son but de réduction du temps de calcul, avec en exemple de gain de temps, un facteur 300 a été obtenu pour le cas de la structure sandwich 7×7 en compression normale jusqu'à 5% de déformation macroscopique.

Les calculs sur le VER ainsi que sur les structures sandwichs ont montré que, localement, des déformations très importantes peuvent se développer. On souhaite maintenant abandonner l'hypothèse des petites déformations afin de modéliser des chargements plus sévères sur les empilements de tubes tout en restant dans le cadre de l'homogénéisation périodique.

Chapitre 4

Simulation du comportement mécanique des architectures cellulaires sous chargements sévères

Lorsqu'ils sont soumis à des chargements sévères, les matériaux cellulaires subissent des déformations locales importantes à l'échelle mésoscopique qui sont dues aux fortes concentrations de contraintes induites par l'architecture. De plus, la structure mésoscopique est soumise à des efforts qui provoquent des non-linéarités géométriques qui se traduisent souvent, pour les matériaux cellulaires, par une dissymétrie du comportement entre des chargements en traction et en compression. Des instabilités peuvent se développer en compression permettant dans certaines applications de dissiper de l'énergie mécanique par déformation plastique. Ainsi, pour modéliser ces phénomènes à l'échelle mésoscopique, il est nécessaire d'utiliser le formalisme des grandes déformations pour prendre en compte les conséquences de l'évolution de la structure à l'échelle de l'architecture au cours de la déformation.

Dans un premier temps (section 4.1), l'analyse des modes de déformation observés expérimentalement pour des chargements en compression, quasi-statiques et dynamiques, a permis d'appréhender qualitativement le comportement à l'échelle mésoscopique des cellules des empilements carré et hexagonal. Puis, la modélisation par éléments finis des structures sandwichs étudiées expérimentalement est présentée dans la section 4.2. On s'est intéressé alors aux limitations des modèles idéalisés et aux effets de taille. Par la suite (section 4.3), une étude du comportement du milieu infini est menée par la technique de l'homogénéisation périodique sur la cellule unitaire. Après avoir introduit l'analyse de la validité du Volume Élémentaire Représentatif, nous présentons les comportements multi-axiaux des empilements carré et hexagonal. En effet, leur comportement inélastique est fortement influencé par l'évolution de la géométrie. Finalement (section 4.4), une Loi Homogène Equivalente est proposée pour modéliser les comportements observés sur les empilements de tubes. Ainsi, une modélisation des structures sandwichs est menée pour

des déformations sévères en compression et en flexion.

4.1 Caractérisation expérimentale du comportement de structures sandwichs en compression

La caractérisation expérimentale du comportement sous chargements quasi-statique et dynamique de structures sandwichs avec un cœur cellulaire à base de tubes a été un des enjeux du projet DynaCell. Le matériau modèle présenté en introduction générale a été sollicité en compression dans le but d'analyser les effets de vitesse de déformation du matériau constitutif du matériau cellulaire, ainsi que les effets d'inertie découlant de l'architecture. Les essais ont été réalisés à l'aide d'un vérin rapide pour des vitesses de chargement de 5 mm/min, 500 mm/min, 1 m/s et 10 m/s. Au sein du Département d'Aéroélasticité et de Dynamique des Structures (DADS) de l'Onera, G. Portement et A. Deudon, avec l'assistance de B. Langrand, étaient en charge du développement et de la mise en œuvre de ces essais. J'ai ainsi eu l'opportunité de participer à la réalisation de ces derniers au cours de mes travaux de thèse.

La machine d'essais utilisée pour réaliser la caractérisation est un vérin hydraulique Schenck, pouvant développer une force de 10 kN et une vitesse maximale du vérin de 10 m/s. Les essais ont donc été menés aux limites techniques de la machine. Un soin particulier, pour le réglage des commandes d'asservissement en vitesse du vérin, a été nécessaire, notamment pour gérer la fin de course et éviter l'endommagement du système hydraulique de la machine. Pour les vitesses de chargement en dessous de 10 m/s, le même moyen d'essai a été utilisé afin de nous affranchir d'une dispersion due au changement de moyen d'essai lors de la comparaison des résultats expérimentaux à différentes vitesses de chargement. Néanmoins, les chargements quasi-statiques auraient pu être réalisés par une machine de traction classique. De même, nous nous sommes restreints à l'étude jusqu'à une vitesse de chargement de 10 m/s, car pour caractériser les réponses mécaniques des structures sandwichs pour des vitesses plus élevées, un autre moyen d'essai aurait dû être utilisé tel que des bars d'Hopkinson. L'acquisition de la force a été réalisée à l'aide d'une cellule d'effort de 60 kN (Kistler : ref. 9031A). Le déplacement du plateau impacteur a été quant à lui mesuré par un extensomètre optique (Zimmer : ref. 200XH). De plus, le suivi de la déformée des structures sandwichs a été réalisé à l'aide d'une caméra rapide à 125000 image/s.

Les échantillons testés étaient des structures sandwichs dont le cœur était un empilement carré ou hexagonal de tubes. La géométrie de tubes était la même que celle considérée tout au long de ce travail. Les empilements carrés étaient constitués de 8 tubes dans la hauteur et 8 tubes dans la largeur. Quant aux empilements hexagonaux, ils comprenaient 8 et 7 tubes de largeur respectivement dans les couches impaires et paires et 9 couches dans la hauteur. On fait référence à cet empilement compact de tubes par le terme d'empilement hexagonal technologique afin de le distinguer de l'empilement hexagonal périodique étudié dans la suite du chapitre. Les structures sandwichs ont été élaborées avec une profondeur de 40 mm. Elles ont ensuite été découpées en deux dans la profondeur dans le but d'obtenir deux échantillons de même géométries (avec les mêmes défauts d'empilement). D'une

part, l'effort sur la machine d'essai a ainsi été divisé par deux et d'autre part, il était alors possible de comparer des échantillons jumeaux.

Quatre essais ont été réalisés pour chacune des 4 vitesses de chargement, avec 2 échantillons jumeaux issus de la même structure sandwich et 2 provenant de d'autres structures sandwiches dont les jumeaux ont été testés à d'autres vitesses de chargement. On peut ainsi identifier les effets de la présence de défauts d'empilement dans le cœur cellulaire sur la dispersion expérimentale.

Les figures 4.2(a,c) présentent les géométries initiales des structures sandwiches dont le cœur est un empilement carré de tubes. Les figures 4.2(b,d) illustrent les déformées à 10% de déformation nominale des structures sandwiches pour des chargements à, respectivement, 5 mm/min et 10 m/s. On remarque que le mode de déformation en quasi-statique prend une forme de croix résultant du confinement par les peaux de la déformation transverse du cœur (figure 4.1(b)). On observe également une rupture partielle des brasures au sein de l'empilement. Le chargement en dynamique ne modifie pas la forme du mode de déformation (figure 4.1(b)). On ne s'intéresse dans la suite de ce travail qu'à la modélisation de chargements quasi-statiques, néanmoins, il est intéressant de savoir que les effets d'inertie à l'échelle mésoscopique n'influent pas de manière notable sur la forme du mode de déformation des cellules du cœur. Les réponses mécaniques des structures sandwiches, dont le cœur est un empilement carré de tubes, pour des chargements quasi-statiques et dynamiques sont présentées sur la figure E.1(a) en annexe E.

Les structures sandwiches avec un cœur hexagonal comportaient globalement plus de défauts d'empilement qu'observés sur l'empilement carré (3 exemples de structures sandwiches sur la figures 4.2(a,c,e)). En effet, des désalignements de tubes sont apparus lors de l'élaboration, ayant pour conséquence l'absence de brasures sur plusieurs couches successives de tubes. Pour le chargement à 5 mm/min (figure 4.2(b)), on observe un écrasement des cellules sur elles-mêmes à l'interface avec les peaux. En revanche, on remarque que l'écrasement des cellules de l'empilement se produit principalement au niveau des défauts d'empilement pour les chargements à des vitesses de chargement plus élevées, 500 mm/min et 1 m/s (figures 4.2(d,f)). Contrairement au cas de l'empilement carré, chaque structure sandwich avec un cœur hexagonal a donné lieu à des bandes de localisation de la déformation différentes, y compris pour deux répétitions d'essais à une même vitesse de chargement. Néanmoins, on retrouve une forme commune d'écrasement des cellules sur elles-mêmes. On observe une rotation des brasures verticales et un enroulement des parois des tubes lors de leur flambement. De plus, dans la majorité des cas, la bande de localisation a une taille caractéristique équivalente à une cellule élémentaire périodique de l'empilement. Les réponses mécaniques de structures sandwiches, dont le cœur est un empilement hexagonal de tubes, pour des chargements quasi-statiques et dynamiques sont présentées sur la figure E.1(b) en annexe E.

L'observation des mécanismes de déformation des cellules lors de compression sur les structures sandwiches permet pour la suite des travaux d'avoir une base de comparaison qualitative de nos modélisations. Malheureusement, au moment de la réalisation de mes travaux de thèse, la comparaison essais/simulations quantitative n'a pas été possible car la loi de comportement du matériau constitutif après élaboration des structures sandwiches n'était pas disponible. En effet, une partie du projet Carnot DynaCell a consisté à étudier

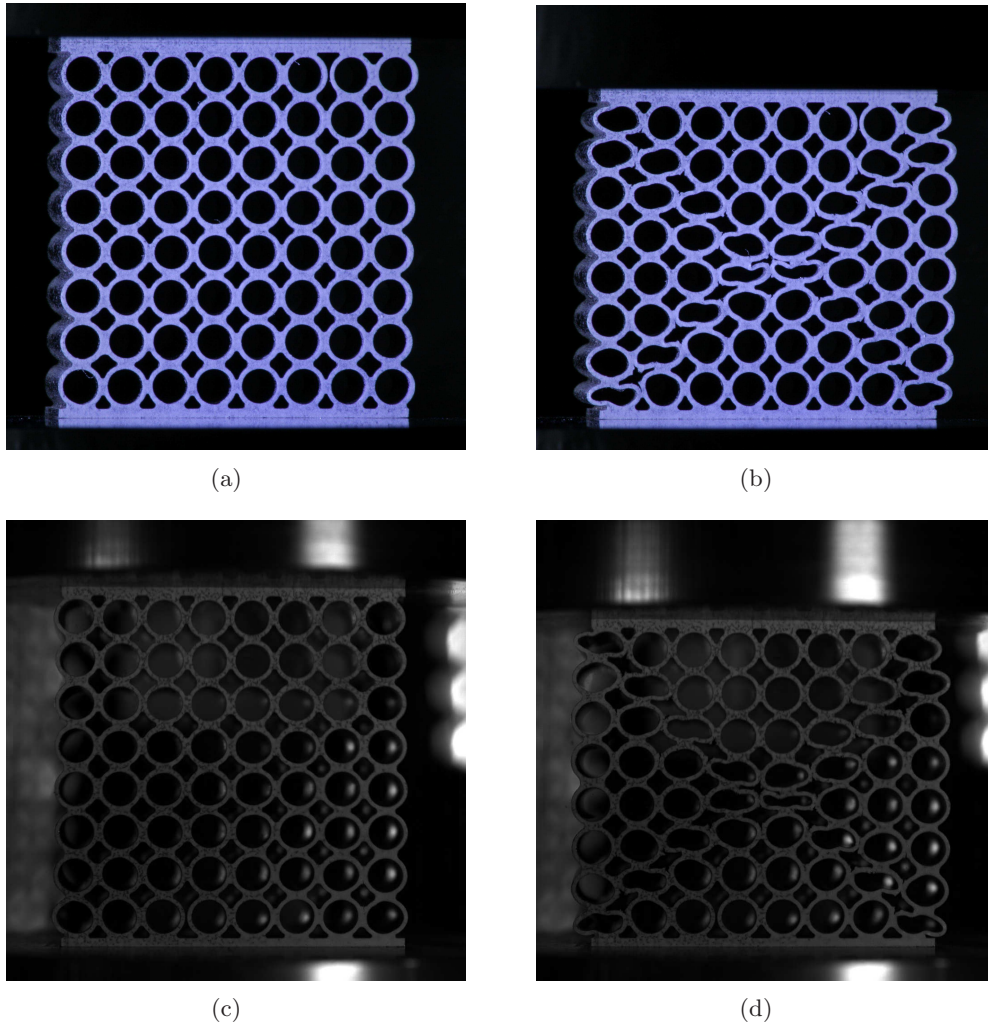


FIG. 4.1 – Essais de compression sur structures sandwichs dont le cœur est en empilement carré. (a) et (c) géométries initiales, (b) déformée à 10% de déformation nominale pour une vitesse de chargement de 5 mm/min, (d) déformée à 10% de déformation nominale pour une vitesse de chargement de 10 m/s.

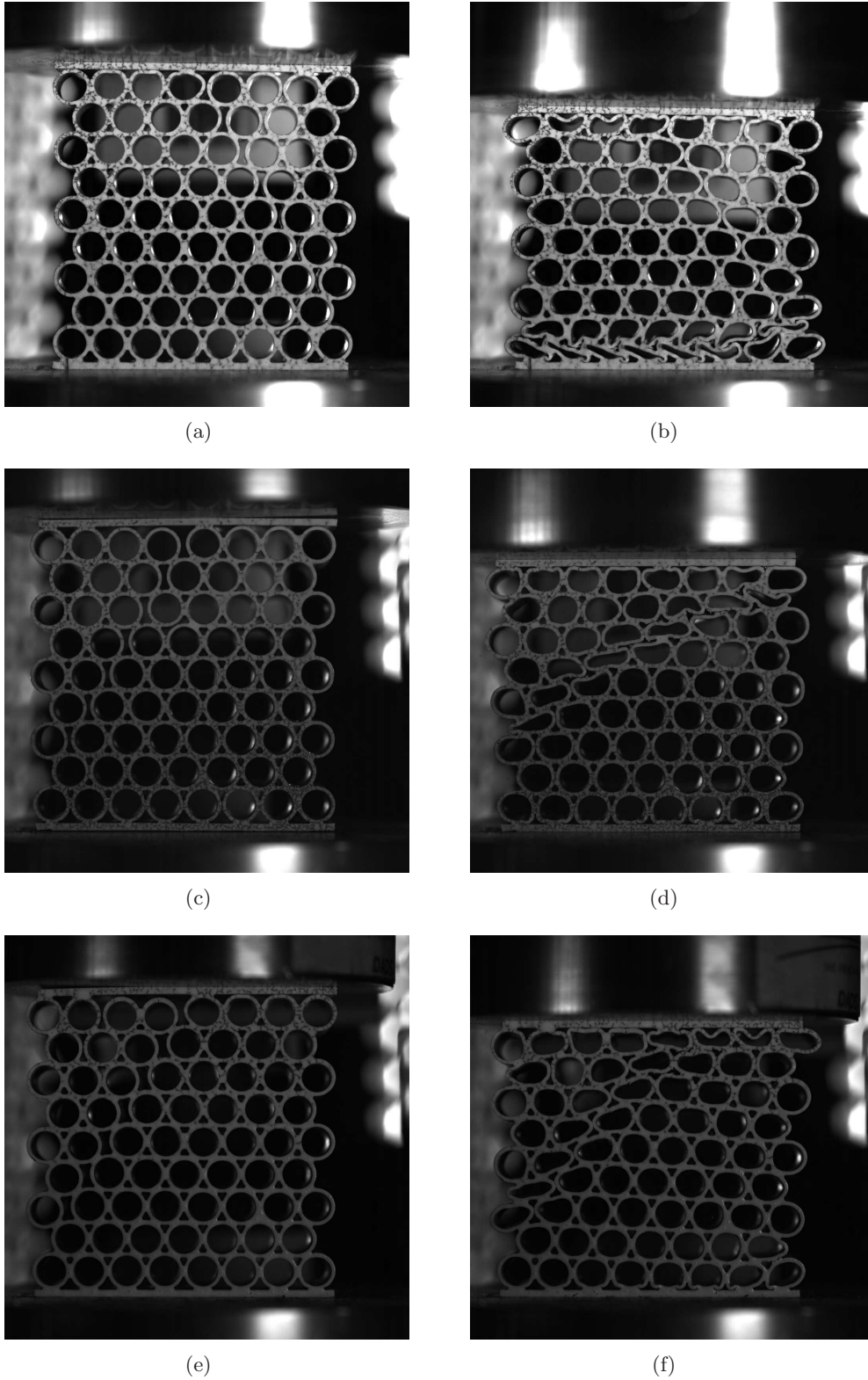


FIG. 4.2 – Essais de compression sur structures sandwichs dont le cœur est en empilement hexagonal. (a), (c) et (e) géométries initiales, (b) déformée à 10% de déformation nominale pour une vitesse de chargement de 5 mm/min, (d) déformée à 10% de déformation nominale pour une vitesse de chargement de 500 mm/min, (f) déformée à 10% de déformation nominale pour une vitesse de chargement de 10 m/s.

l'effet sur le comportement du traitement thermique de brasure et de la présence du métal d'apport. Ces derniers modifient grandement le comportement mécanique des parois, notamment en termes de taille de la microstructure dans les parois et de sa composition dans les joints de brasure. Cependant, les essais sur structures sandwichs préliminaires ont montré des ruptures fragiles des joints de brasure. Ainsi, un deuxième traitement thermique a été nécessaire pour la fabrication d'empilements de tubes à joints de brasure ductiles. Mais la campagne de caractérisation de l'influence du deuxième traitement thermique a été réalisée en parallèle de ce travail de thèse. Par conséquent, la loi de comportement du matériau constitutif utilisée dans la suite est issue de travaux précédents (Marcadon et Kruch, 2011). Dans la suite de ce chapitre, nous allons mettre l'accent sur la simulation de tels essais afin d'observer les modes de localisation de la déformation qui en résultent.

4.2 Modélisation des structures sandwichs de taille finie

La modélisation des structures sandwichs par la méthode des éléments finis a été faite dans le cadre d'une géométrie idéalisée des empilements. De nombreux défauts peuvent exister dans l'empilement réel mais ce point n'est pas étudié ici. On suppose un cœur parfaitement périodique, de tubes et de joints de brasure de taille et de distribution constante. L'observation du comportement sous chargements quasi-statiques et dynamiques de l'empilement carré n'a montré qu'une faible dépendance des modes de déformation à la présence de défauts dans l'empilement, contrairement à l'empilement hexagonal. Dans un premier temps, la modélisation des structures étudiées expérimentalement a été réalisée afin d'analyser les modes de déformations simulés. Puis, une étude des effets de taille pour les deux empilements de tubes a été menée pour caractériser l'influence des effets de bords sur le comportement macroscopique et sur l'apparition des modes d'instabilité.

4.2.1 Définition des hypothèses de modélisation

Les structures sandwichs ne sont plus modélisées en réduisant le modèle par symétrie. En effet, les conditions de symétrie sont trop restrictives par rapport aux modes de localisation non-symétriques qui peuvent se développer dans le cœur. Les éléments utilisés sont identiques à ceux utilisés dans les modèles du chapitre 3 : éléments quadratiques de taille de maille minimale de 0.2 mm afin de modéliser convenablement les concentrations de contrainte dans les joints de brasure. Le matériau constitutif est également identique aux travaux menés en petites déformations : élasto-plastique isotrope (table 3.1). La formulation d'une loi de comportement en grandes déformations fait appel à l'expression des grandeurs dans un repère local objectif (Besson *et al.*, 2009). Ainsi les lois de comportement et les paramètres matériaux identifiés en petites déformations peuvent être transposés au cas des grandes déformations. On exprime alors la contrainte et la déformation par des tenseurs $\underline{\underline{\zeta}}$ et $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$ invariants par changement de référentiel.

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{Q}}^T \quad (4.1)$$

$$\underline{\underline{\zeta}} = \underline{\underline{Q}}^T \frac{\rho_0}{\rho} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{Q}} \quad (4.2)$$

où $\underline{\underline{D}}$ est le tenseur des taux de déformation, $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy, ρ_0 et ρ sont respectivement les masses volumiques initiale et courante, $\underline{\underline{Q}}$ est le tenseur de rotation plaçant la contrainte dans un repère objectif. On choisit ici $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{R}}$ la rotation propre où $\underline{\underline{R}}$ est la composante de rotation de la décomposition polaire de $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}\underline{\underline{U}}$. Les calculs sont arrêtés au premier contact qui apparaît au sein des cellules de l'empilement, à l'exception de la géométrie dite technologique de l'empilement hexagonal qui sera décrite ultérieurement.

Empilement carré

Tout d'abord, nous nous sommes intéressés à la compression normale à la structure sandwich dont le cœur est un empilement carré de tubes. La figure 4.3 représente le calcul mené jusqu'à apparition du contact des tubes, soit pour une déformation nominale

macroscopique de 12%. On remarque la localisation de la déformation plastique en croix qui découle du fort contraste de raideur entre les peaux et le cœur cellulaire. Ce résultat est comparable aux résultats observés en petites déformations (section 3.3). Afin d'étudier le mode de déformation, plusieurs simulations ont été réalisées avec l'introduction de perturbations dans le cœur. Pour cela, on attribue un comportement plus faible (abaissement de 20% du module d'Young, de la limite d'élasticité et du module d'écrouissage par rapport au matériau de base) à des zones arbitrairement choisies dans le cœur (figure 4.4). Ce type d'artifice pour introduire une perturbation ne représente pas un phénomène physique, néanmoins c'est un moyen simple de déclencher l'instabilité un calcul possiblement instable. On a alors observé que le mode de déformation de l'empilement, observé sur la figure 4.3, n'est pas modifié par l'introduction de la perturbation, quelle que soit sa position au sein de l'empilement. Ce résultat est alors comparé aux essais expérimentaux présentés en section 4.1 où l'on a observé que le mode de déformation de l'empilement carré, lors des chargements quasi-statiques et dynamiques, n'est pas modifié malgré la présence de nombreux défauts d'empilement.

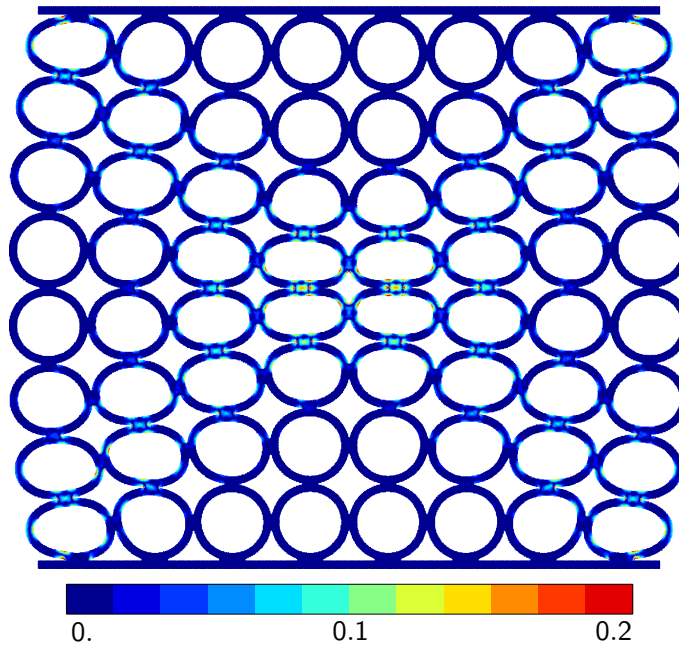


FIG. 4.3 – Cartographie de la déformation plastique cumulée lors du chargement en compression d'une structure sandwich en empilement carré de 8×8 tubes

Empilement hexagonal

L'empilement hexagonal dit technologique est l'autre géométrie qui a été caractérisée expérimentalement. Cependant, comme nous l'avons vu précédemment (section 3.3), dans le cas de la structure sandwich dite technologique, la déformation se localise principalement dans les tubes n'ayant pas l'ensemble de leurs voisins à l'interface entre les peaux

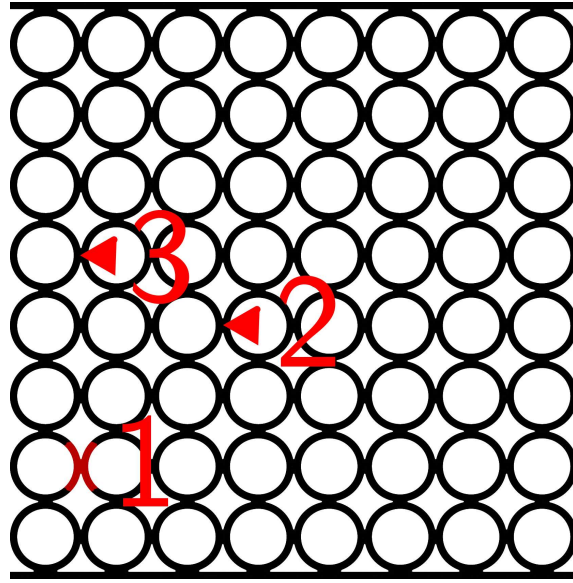


FIG. 4.4 – Zones perturbées du cœur en empilement carré de tube de la structure sandwich. Zone 1 : exemple de taille de perturbation.

et le cœur. Par conséquent, la modélisation de cet empilement nécessite de prendre en compte le contact qui se développe entre les peaux et les tubes du pourtour du cœur qui ne respect plus la périodicité, afin de pouvoir étudier l'importante redistribution des déformations dans la partie centrale du cœur cellulaire. Pour cela, le contact de type *normal* de Z-set sans frottement a été utilisé. La cartographie de la déformation plastique cumulée pour un chargement en compression utilisant les grandes déformations est présentée en figure 4.5(a). La simulation ne converge plus au delà de 5% de déformation nominale. Une alternative a été alors mise en œuvre en utilisant la formulation *updated* en petites déformations. Cette technique permet de faire un calcul élément finis dans l'hypothèse des petites déformations par incréments, en réactualisant la configuration géométrique du calcul à chaque pas de temps. Ceci permet de prendre en compte les non-linéarités géométriques du modèle. La figure 4.5(b) présente la déformée, sous ces hypothèses, de la structure sandwich dit technologique dont le cœur est un empilement hexagonal de tubes. On remarque que le contact se développe effectivement au niveau des peaux et que la déformation est homogène dans la partie périodique du cœur. Cependant, ce phénomène n'est pas en accord avec les modes de déformation observés lors des essais expérimentaux. Par conséquent, des simulations avec l'introduction d'une perturbation dans le cœur ont été menées. Ainsi, en affaiblissant localement le comportement des parois des tubes lors de plusieurs réalisations de perturbations, on observe une bande de localisation de la déformation comme le montrent les figures 4.5(c,d). Dans un premier temps, le chargement en compression de la structure sandwich engendre un cisaillement global lors de l'apparition de l'instabilité. La présence d'une ou plusieurs perturbations dans des endroits arbitrairement choisis (figure 4.6) dans le cœur aboutit au flambement de cellules de l'empilement à l'échelle mésoscopique comme illustré sur la figure 4.5(c). Ainsi, la peau supérieure a été

bloquée en déplacement suivant la direction X pour empêcher ce cisaillement. Ce blocage génère une force de réaction au point bloqué en déplacement suivant la direction X au niveau de la peau supérieure. Cependant, cette force est négligeable par rapport à la réaction macroscopique en compression, indiquant que le blocage de l'instabilité provoquant un cisaillement ne confine pas excessivement le mode de déformation. Par ailleurs, on observe une bande de localisation au sein de l'empilement à l'échelle mésoscopique. Lors des différentes réalisations de modélisation de structures sandwichs perturbées, cette bande de localisation de la déformation s'est développée dans une couche de tubes du cœur. Néanmoins, les bandes de localisation de la déformation observées expérimentalement (section 4.1) n'ont pas la forme obtenue à l'aide de notre modèle éléments finis. Cependant, la forme du mode de flambement de la cellule élémentaire de l'empilement est similaire à celle au sein de la bande de localisation de la déformation dans le cœur des structures sandwichs en compression. On en conclut que le mode de déformation au sein de la bande de localisation est le comportement important à modéliser.

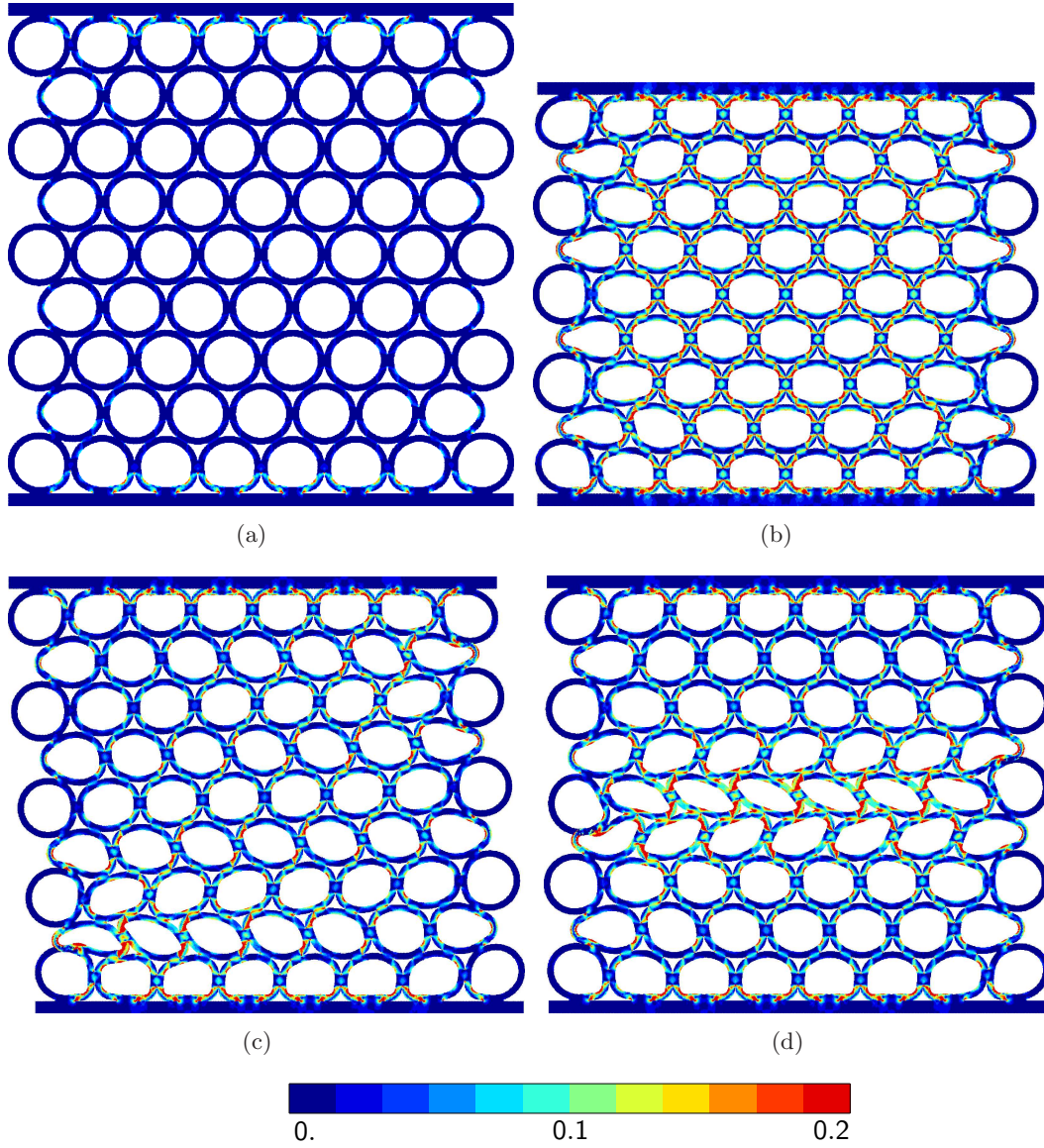


FIG. 4.5 – Cartographie de la déformation plastique cumulée lors du chargement en compression d’une structure sandwich dit technologique dont le cœur est un empilement hexagonal de 8×9 tubes ; (a) en grandes déformations, (b) en petites déformations avec réactualisation de la géométrie, (c) en petites déformations avec réactualisation de la géométrie avec perturbation, (d) en petites déformations avec réactualisation de la géométrie avec perturbation et blocage en déplacement suivant la direction X de la peau supérieure

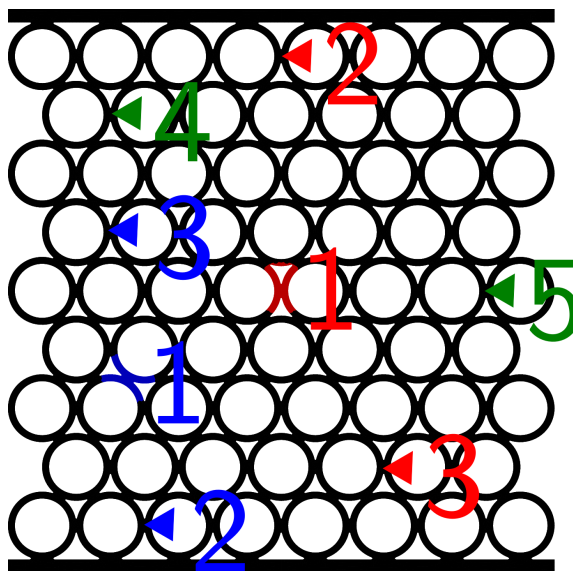


FIG. 4.6 – Zones perturbées du cœur en empilement hexagonal de tube de la structure sandwich. Zone 1 et 2 : exemples de tailles des zones perturbées.

4.2.2 Réponses mécaniques des structures sandwichs pour des chargements en compression

On considère dans cette partie les structures sandwichs dont le cœur est un empilement carré et hexagonal périodique. Les réponses macroscopiques sont d'abord présentées afin de caractériser le comportement mécanique de la structure jusqu'à 10% de déformation nominale. Puis, l'étude de l'influence des effets de bords est menée pour les deux types de cœur cellulaire. Pour cela, une étude paramétrique a été réalisée pour des tailles de structures sandwichs variables. Finalement, le comportement au sein de la bande de localisation a été étudié plus spécifiquement pour l'empilement hexagonal.

Les différentes tailles de cœur considérées ici sont les mêmes que celles étudiées en petites déformations dans le chapitre précédent (section 3.3), à savoir des structures sandwichs de 3 tubes dans la largeur et 3 tubes dans la hauteur à 11×11 tubes avec des peaux de 0.5 mm d'épaisseur.

Influence des effets de bords dans le cas de l'empilement carré

Dans un premier temps, on s'intéresse aux effets de taille de cœur sur le comportement des structures sandwichs dont le cœur est en empilement carré de tubes. Pour cela, des chargements quasi-statiques en compression uniforme sont appliqués sur des structures sandwichs de taille de cœur croissante. Les réponses mécaniques sont présentées sur la figure 4.7. On remarque d'abord que l'effet de taille est faible avec une réponse légèrement plus raide pour l'empilement de 3×3 tubes. Néanmoins, pour des tailles de sandwichs dont l'élancement varie, on observe sur les figures 4.8(a,b) que la réponse mécanique est fortement influencée par les effets de bords. Dans un premier temps, on remarque que pour une structure sandwich de 11×3 tubes, la réponse mécanique en compression est beaucoup plus raide que le sandwich de même largeur mais avec plus de tubes dans la hauteur mais également que les tubes de la même hauteur mais de largeur plus faible. En effet, comme l'illustre la figure 4.9, la déformation transverse du cœur est confinée par les peaux conduisant à une raideur plus importante de la structure. En revanche, la raideur de la structure sandwich de 3×11 tubes n'est pas beaucoup plus faible que celle des structures sandwichs de largeur identique mais de hauteur moins importante. Ainsi, on peut conclure que le comportement macroscopique des structures sandwichs dont le cœur est un empilement carré de tubes est dominé par le confinement de la déformation transverse au niveau des peaux. Ces conclusions sont analogues à celles tirées en petites déformations pour des niveaux de déformation plus faible, ainsi on en conclut également que les non-linéarités géométriques ne modifient pas l'influence des effets de bords lors de chargements en compression pour des déformations plus importantes.

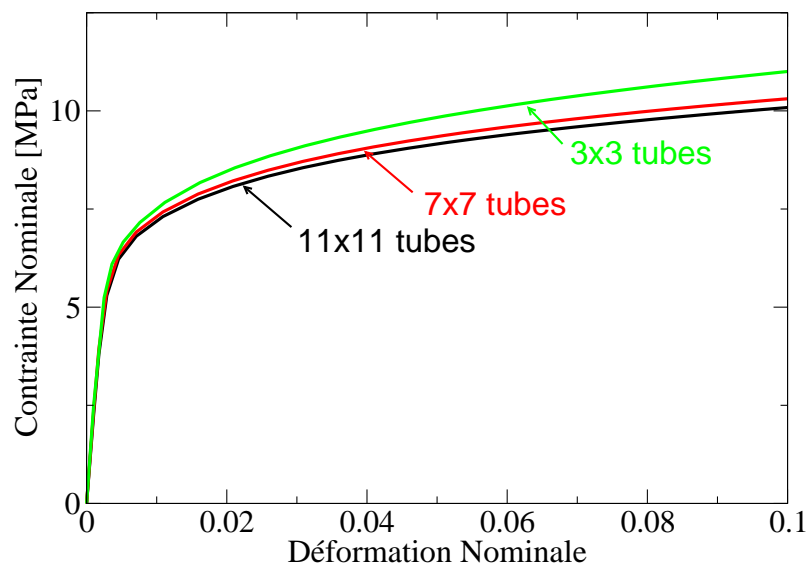
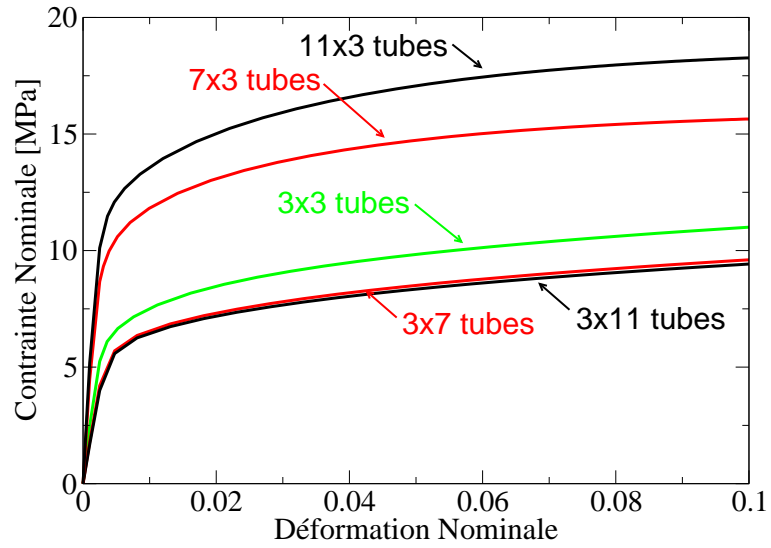
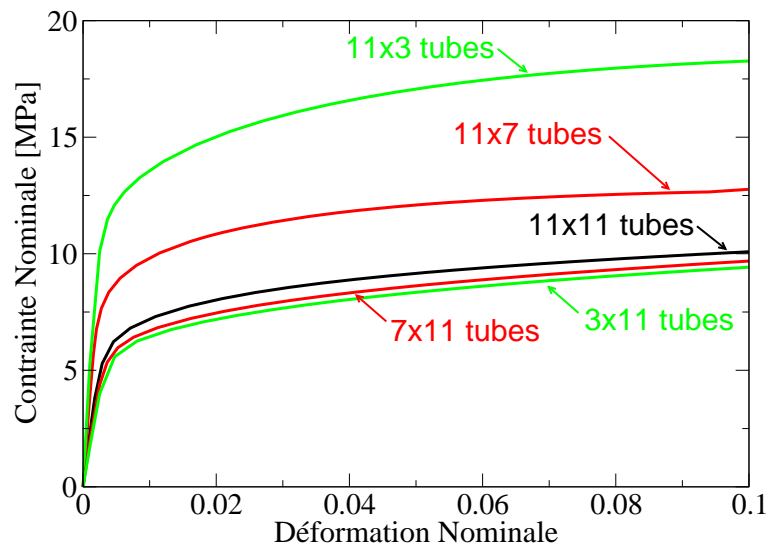


FIG. 4.7 – Chargements en compression de structures sandwichs dont le cœur est constitué d'un empilement carré de tubes et prend pour tailles : 3×3 , 7×7 et 11×11 tubes.



(a)



(b)

FIG. 4.8 – Chargements en compression de structures sandwichs dont le cœur est constitué d'un empilement carré de tubes et prend pour tailles : (a) différents élancements comparés au cœur de 3×3 tubes, (b) différents élancements comparés au cœur de 11×11 tubes.

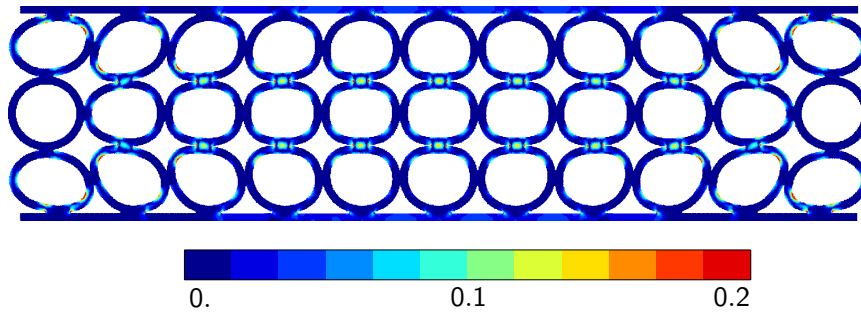


FIG. 4.9 – Cartographie de la déformation plastique cumulée de calcul lors d'un chargement en compression sur la structure sandwich dont le cœur est un empilement carré de 11×3 tubes jusqu'à 10% de déformation nominale.

Influence des effets de bords sur les structures sandwichs dans le cas de l'empilement hexagonal

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés aux structures sandwichs dont le cœur est un empilement hexagonal de tubes. Une étude similaire à celle de l'empilement carré est menée, afin d'étudier l'influence de la taille du cœur sur l'apparition d'une bande de localisation en présence ou non d'une perturbation au sein de l'empilement. On observe sur la figure 4.10(b) une déformation plus localisée par rapport à la simulation sans perturbation (figure 4.10(a)). Le comportement macroscopique en compression de ces structures sandwichs de 7×7 tubes est illustré sur la figure 4.11, également avec les comportements des structures sandwichs de 3×3 et 11×11 tubes. La simulation de la compression de la structure sandwich avec 11×11 tubes sans perturbation a dû être arrêtée après plus de 4 semaines de calcul expliquant la courbe s'arrêtant plus tôt. Ainsi, on remarque que la contrainte nominale atteint un maximum avant de diminuer, ce comportement adoucissant de la structure se développe plus tôt donc pour un niveau de contrainte un peu plus faible sur la structure avec perturbation. Comme observé sur la figure 3.19(a) (section 3.3) lors des calculs en petites déformations jusqu'à 5% en petites déformations, la raideur de la réponse mécanique macroscopique en compression croît avec la taille de sandwich. Ce comportement est donc l'opposé de ce que l'on observe pour l'empilement carré (figure 4.7). La modélisation de structure sandwichs avec des élancements variables permet d'observer quels sont les effets de bords qui gouvernent le comportement de ces structures sandwichs dont le cœur est un empilement hexagonal de tubes. D'une part, on observe sur la figure 4.12(a) que la saturation de la contrainte macroscopique se fait pour des niveaux de déformation nominale plus précoce pour les sandwichs de 3 tubes de largeur au fur et à mesure que la hauteur croît. On remarque sur la cartographie de la déformée du calcul 3×11 (figure 4.10(c)) qu'un flambement, non pas uniquement à l'échelle mésoscopique mais aussi l'échelle macroscopique, s'est produit sous l'effet de l'effondrement des cellules sur elles-mêmes. D'autre part, on observe sur la figure 4.12(b) que pour une plus grande largeur des structures sandwichs, l'influence des effets de bords devient faible. Comme il était prévisible, la présence des peaux pour des structures de petites dimensions joue un rôle de raidisseur qui s'atténue dès que la structure devient plus grande. A l'exception des structures à grand élancement en hauteur qui montrent un mode de flambement macroscopique.

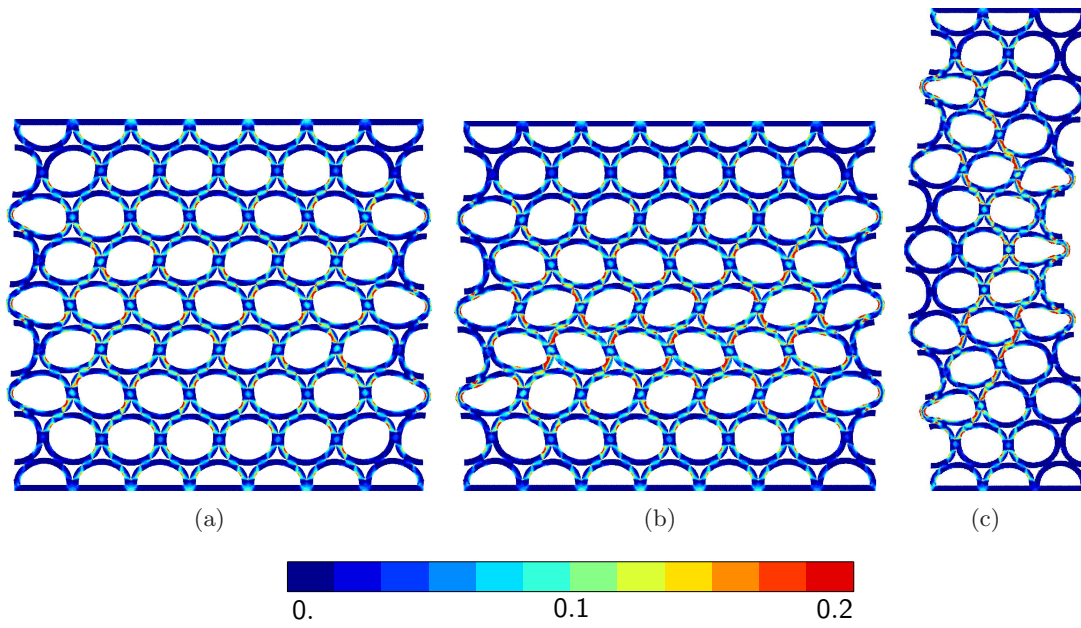


FIG. 4.10 – Cartographie de la déformation plastique cumulée lors du chargement en compression jusqu'à 10% de déformation nominale des structures sandwichs dont le cœur est un empilement hexagonal de tubes (a) 7×7 tubes en grandes déformations sans perturbation, (b) 7×7 tubes en grandes déformations avec perturbation, (c) 3×11 tubes en grandes déformations avec perturbation.

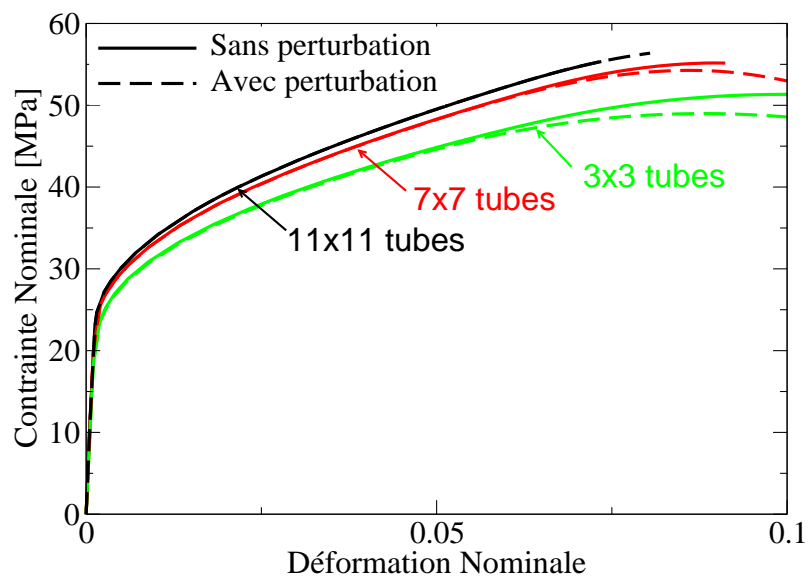
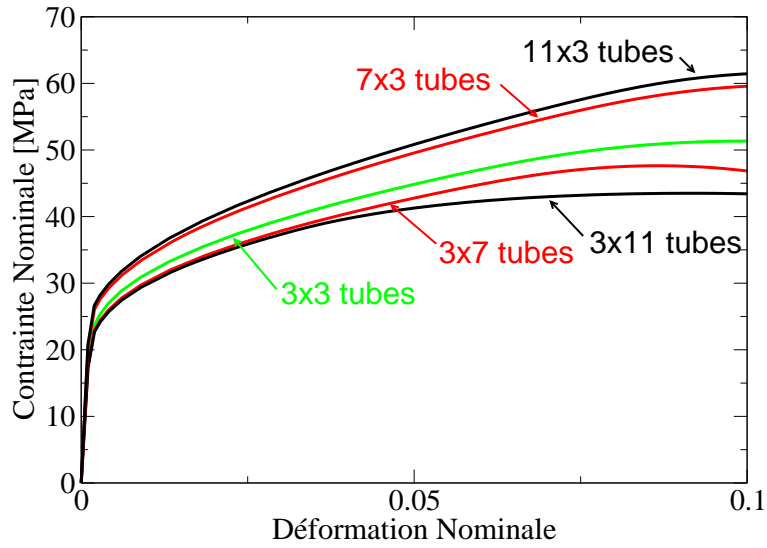
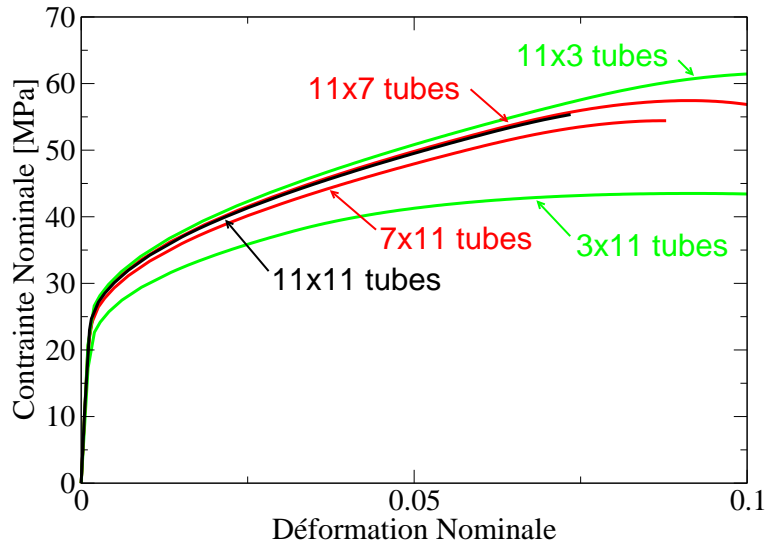


FIG. 4.11 – Chargements en compression de structures sandwichs constitué d'un empilement hexagonal de tubes pour des tailles du cœur de 3×3 , 7×7 et 11×11 tubes. Courbes continues : sans perturbation, courbes en tirets : avec perturbation



(a)



(b)

FIG. 4.12 – Chargements en compression de structures sandwichs dont la taille du cœur, constitué d'un empilement hexagonal de tubes, varie pour : (a) différents élancements comparés au cœur de 3×3 tubes, (b) différents élancements comparés au cœur de 11×11 tubes.

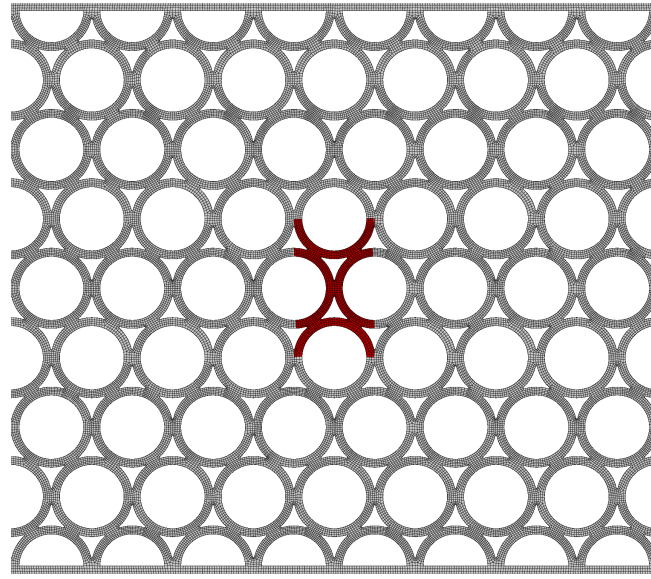
Comportement d'une cellule unitaire au sein de l'empilement hexagonal

Le comportement macroscopique adoucissant est la conséquence d'une instabilité à l'échelle mésoscopique. En effet, les bandes de localisation de la déformation montrent un flambement des cellules. En outre, ce comportement est observé pour toutes les tailles de structures sandwichs à cœur hexagonal étudiées précédemment. Nous nous sommes donc intéressés au comportement à l'échelle de la cellule unitaire au sein de l'empilement. Pour cela, on a procédé à une mesure du comportement d'une cellule périodique au sein du cœur de la structure sandwich en extrayant sa déformation macroscopique et les contraintes qui y sont associées. Pour cela, la théorie de l'homogénéisation en grandes déformations présentées en chapitre 2 et en annexe A a été utilisée.

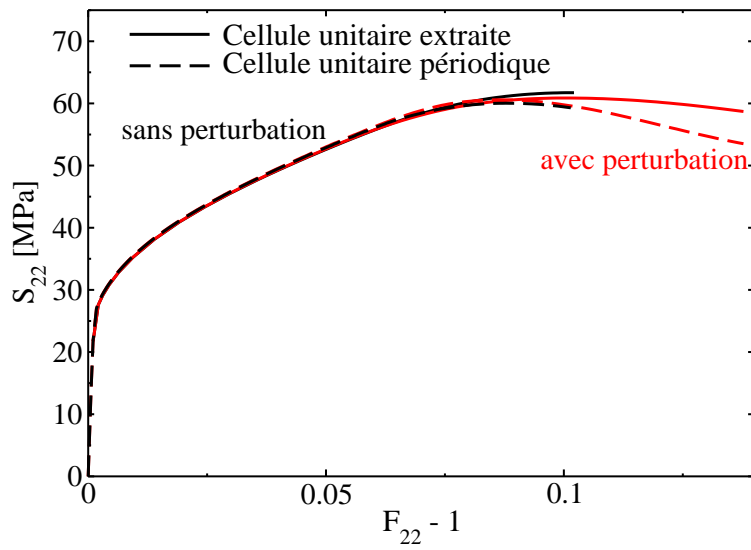
Les déplacements aux bords de la cellule unitaire illustrée sur la figure 4.13(a) ont été utilisés afin de calculer le gradient des déplacements $\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{1}$. Puis, on utilise une opération de moyenne des contraintes de Boussinesq $\tilde{\mathbf{S}}_m$ mésoscopique pour calculer la contrainte de Boussinesq macroscopique $\tilde{\mathbf{S}}$. Pour cela, un transport en chaque point du maillage de la contrainte de Cauchy vers la contrainte de Boussinesq est effectué, suivi d'une pondération par la fraction volumique de matière dans la cellule unitaire non-déformée.

Ainsi, on obtient le comportement effectif de la cellule unitaire présenté sur la figure 4.13(b). Ainsi, pour une déformation en compression macroscopique identique appliquée à la structure sandwich, la déformation de certaines cellules unitaires est plus importante (bande de localisation, figure 4.10(b)) que dans les cellules du cœur de la simulation sans perturbation où aucune localisation de la déformation n'apparaît (figure 4.10(a)).

Nous avons ensuite procédé à une seconde analyse en étudiant uniquement le modèle de la cellule unitaire périodique. La méthode a consisté à appliquer, sur la cellule unitaire périodique, la déformation macroscopique extraite du calcul de référence. Ainsi, le comportement obtenu par homogénéisation périodique est comparé au comportement de la cellule extraite du cœur. On constate que les comportements inélastiques sont proches et que la contrainte maximale est bien modélisée. De plus, le comportement adoucissant post-instabilité est bien pris en compte par le calcul sur cellule unitaire périodique. On en conclut que l'instabilité et le comportement post-instabilité peuvent être modélisés par la technique de l'homogénéisation périodique. La comparaison menée dans cette partie s'est restreinte à l'empilement hexagonal qui présentait le comportement le plus riche en termes d'instabilités de la structure soumise à un chargement en compression. Nous avons ainsi pu montrer le lien entre le comportement macroscopique et le comportement à l'échelle mésoscopique.



(a)



(b)

FIG. 4.13 – Structure sandwich dont le cœur est un empilement hexagonal de 8×8 tubes : (a) géométrie de la cellule unitaire extraite (b) Courbe contrainte/déformation sur la cellule unitaire ; Courbes noires : simulations sans perturbation, courbe rouges : simulations avec perturbation. Courbes continue : réponse mécanique mésoscopique d'une cellule unitaire extraite du calcul sur structure sollicitée à 10% de déformation nominale, courbes en tiret : comportement de la cellule périodique homogénéisée.

4.3 Caractérisation du comportement macroscopique de cellules périodiques

On propose dans cette partie une caractérisation en grandes déformations du comportement de la cellule unitaire des deux types d'empilements. Les outils disponibles dans le code de calcul Z-set, ne nous ont permis de modéliser les cellules périodiques des empilements de tubes en grandes déformations qu'en déformations planes. L'influence de cette hypothèse sera discutée ultérieurement.

4.3.1 Etude de l'empilement carré

On étudie tout d'abord la cellule unitaire de l'empilement carré pour des chargements de cisaillement dans le plan et uni-axiaux en traction et en compression. Les figures 4.14(a,b) illustrent les déformées de la cellule périodique de l'empilement carré pour des chargements en compression. La figure 4.15 présente les réponses mécaniques uni-axiales en traction et compression et de cisaillement. On remarque la forte différence de comportement en traction et en compression qui est la conséquence uniquement des non-linéarités géométriques. On retrouve également le comportement observé précédemment sur la figure 3.4 (section 3.1), à savoir une réponse mécanique lors du chargement en cisaillement plus raide que les chargements uni-axiaux.

Le cas du chargement équi-bi-axial de la cellule périodique de l'empilement carré en compression a ensuite été étudié afin de caractériser la compressibilité du matériau. La figure 4.16(a) présente la cartographie du premier calcul en appliquant le chargement $F_{11}-1 = F_{22}-1 = -0.1$ ($S_{12} = S_{21} = 0$). On remarque qu'une déformation en cisaillement importante est générée lors de ce chargement. La figure 4.16(b) illustre le même chargement en déformations imposées avec blocage du cisaillement macroscopique $F_{12} = F_{21} = 0$. La modélisation en grande déformations rend compte du changement de géométrie. Ainsi, la perte de symétrie de la cellule génère un cisaillement en dépit d'un chargement uniquement normal. Or, lorsque les cisaillements macroscopiques sont bloqués, aucune contrainte de cisaillement n'est générée car la cellule périodique reste symétrique. Néanmoins, les contraintes dans le plan sont supérieures dans le cas où le cisaillement est bloqué à celles où il ne l'est pas (figure 4.16(d)). Par ailleurs, on remarque ainsi sur la figure 4.16(c) que la déformation n'est pas identique en compression équi-bi-axiale en contraintes imposées $S_{11} = S_{22} = -25$ MPa. La figure 4.16(d) montre bien, pour ce dernier chargement, que les composantes de l'écoulement sont d'abord identiques suivant les deux directions du plan. Puis, au delà d'une contrainte maximale, l'écoulement plastique devient aléatoirement (à cause des arrondis numériques) plus important dans une des directions, ici la direction Y. Cette observation doit être reliée au fait que les surfaces d'écoulement identifiées en petites déformations présentaient un point anguleux pour des chargements équi-bi-axiaux (figure 3.6(a), section 3.1). Ainsi, d'un côté ou de l'autre de la singularité, l'écoulement peut avoir une normale différente.

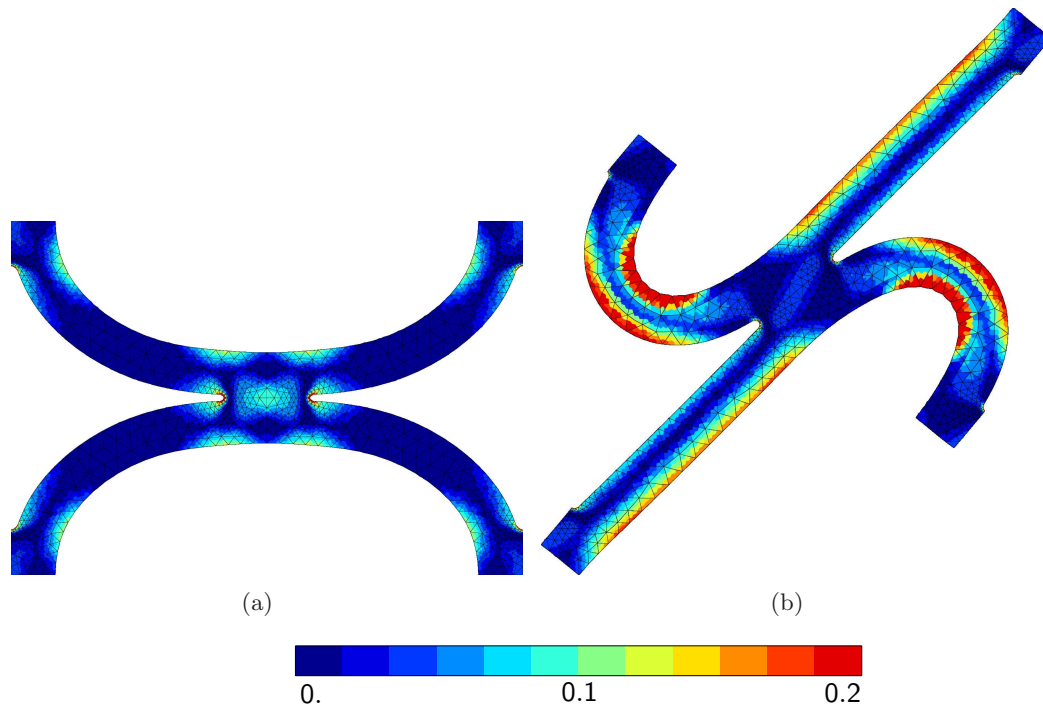


FIG. 4.14 – Cartographie de la déformation plastique cumulée lors de chargement de la cellule unitaire de l'empilement carré (a) en compression suivant la direction Y : $F_{22} - 1 = -0.2$ (b) en cisaillement : $F_{12} = F_{21} = 0.2$

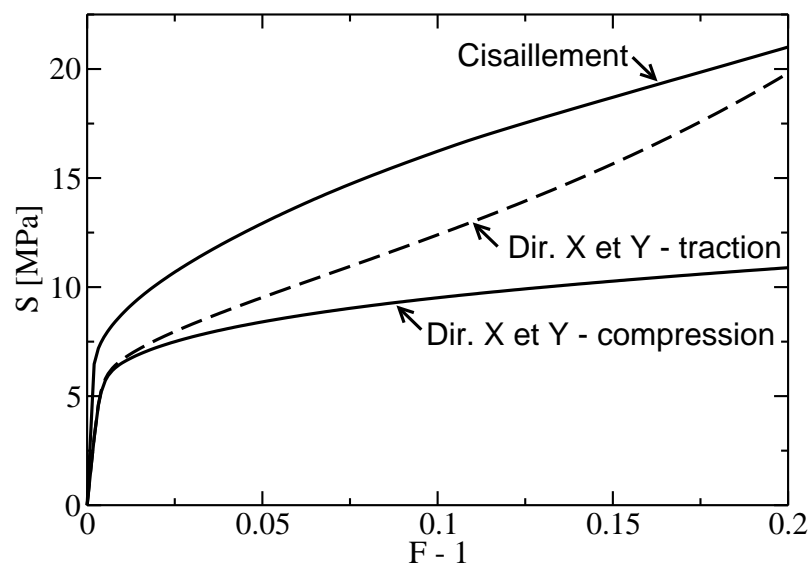


FIG. 4.15 – Réponses mécaniques de la cellule unitaire de l'empilement carré lors de chargements uni-axiaux dans les directions X et Y en traction et compression et du chargement en cisaillement dans le plan.

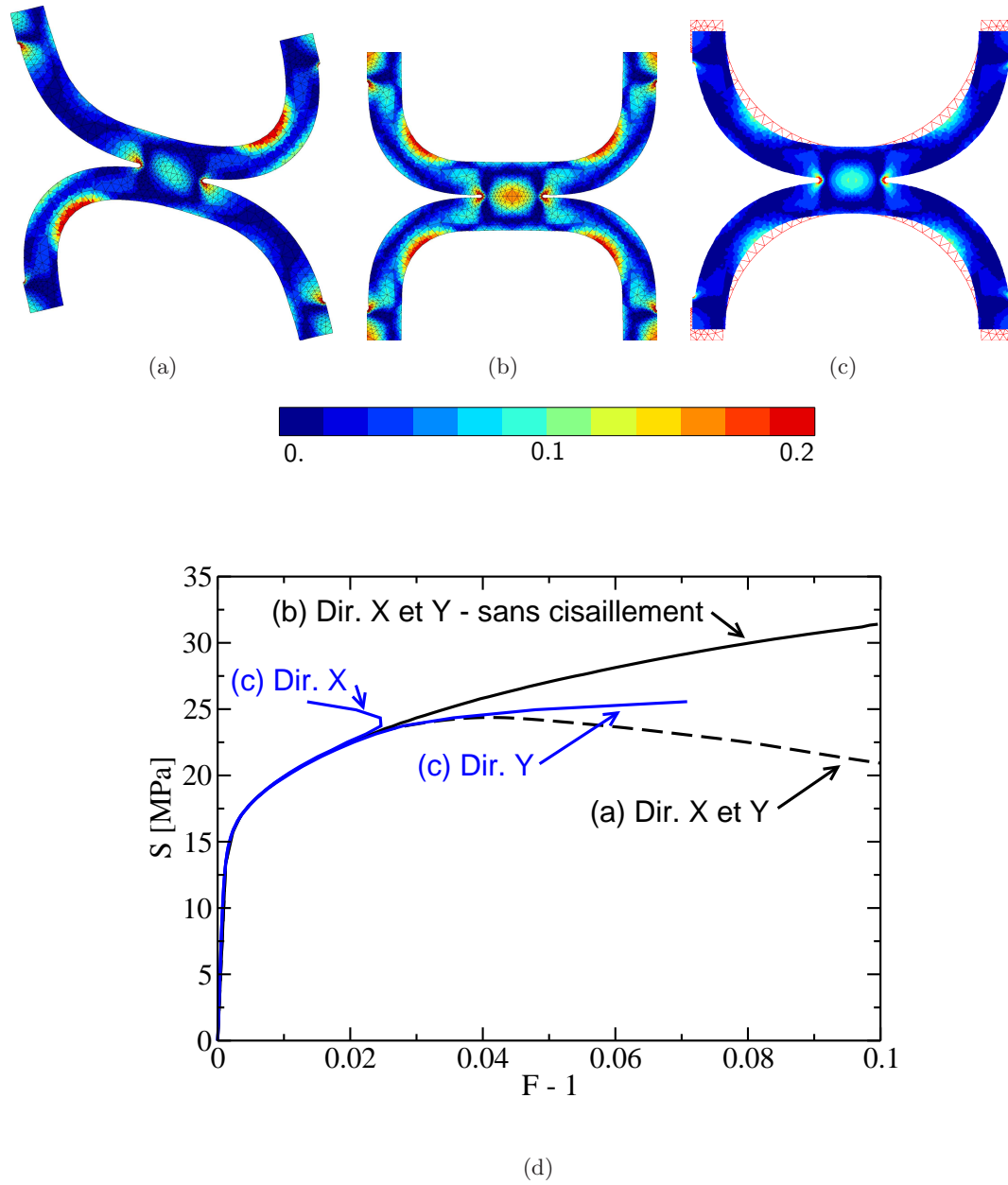


FIG. 4.16 – Cartographie de la déformation plastique cumulée lors de compressions équi-bi-axiales sur la cellule unitaire de l’empilement carré ; (a) en déformations imposées $F_{11} - 1 = F_{22} - 1 = -0.1$ avec $F_{12} = F_{21}$ libres, (b) en déformations imposées $F_{11} - 1 = F_{22} - 1 = -0.1$ avec $F_{12} = F_{21} = 0$, (c) en contraintes imposées $S_{11} = S_{22} = -25$ MPa avec $F_{12} = F_{21}$ libres (avec le maillage initiale), (d) courbes contraintes/déformations des chargements équi-bi-axiaux

4.3.2 Etude de l'empilement hexagonal

De manière similaire à l'empilement carré, le comportement sous chargements uni-axiaux et en cisaillement dans le plan de la cellule unitaire de l'empilement hexagonal a ensuite été étudié. Les chargements en compression sont présentés pour une déformation de 20% suivant la direction X, suivant la direction Y et en cisaillement respectivement aux figures 4.17(a), 4.18(a,b,c,d) et 4.17(b). On remarque que le comportement en compression suivant la direction Y présente un mode de déformation non-symétrique. Ce mode de déformation est à cisaillement nul. En effet, il s'agit uniquement d'une déformation homogène en compression additionnée à une fluctuation périodique. Par ailleurs, ce mode de déformation de la cellule périodique est comparable aux modes de déformation observés sur des compressions sur nids d'abeille dans les travaux de Okumura *et al.* (2004). En effet, le joint de brasure vertical agit comme la paroi verticale d'un nid d'abeille en position "zigzag" (Asada *et al.*, 2009) qui flambe en compression suivant la direction verticale. Ainsi, le comportement effectif de cette cellule périodique pour des chargements uni-axiaux est présenté sur la figure 4.19. On observe une très grande différence de comportement entre la traction et la compression. D'une part, dans le régime durcissant, les réponses inélastiques sont très différentes. D'autre part, dans le cas de la compression suivant la direction Y, on observe un comportement adoucissant très marqué. En outre, pour ce dernier chargement, la simulation montre également le caractère auxétique du comportement post-instabilité de l'empilement hexagonal (figure 4.20). En effet, le changement de géométrie du VER, notamment les rotations dans la cellule unitaire des parois et des joints de brasures provoquent une déformation transverse donnant un coefficient de Poisson apparent négatif ($-\frac{F_{22}-1}{F_{11}-1}$). On peut comparer ce mode de déformation auxétique au motif hexachiral analysé dans les travaux de Dirrenberger (2012).

4.3.3 Modes d'instabilité et Volume Élémentaire Représentatif

La question de la représentativité d'un Volume Élémentaire Représentatif est un aspect essentiel des méthodes multi-échelles. Dans le cas d'un milieu périodique, la cellule périodique est généralement le VER au sens de l'élasticité et de l'élasto-plasticité. Cependant, en présence d'instabilité la validité du VER doit être étudiée. La validation passe par une comparaison du comportement de la cellule unitaire avec un VER incluant plus d'hétérogénéités. Ainsi, un motif de plusieurs cellules unitaires a été étudié. Dans le cas de l'empilement carré, le comportement de la cellule unitaire est identique au motif jusqu'à 8×8 de cellules unitaires. On considère donc la cellule unitaire comme étant le VER de l'empilement carré. Au contraire, dans le cas de l'empilement hexagonal et pour un chargement uni-axial en compression suivant la direction Y sur un motif périodique de 8×8 cellules unitaire, une localisation de la déformation se développe comme illustré sur la figure 4.21(b). La déformation n'est pas identique dans toutes les cellules unitaires du motif périodique. Afin de caractériser le comportement au sein de la bande de localisation, on extrait le comportement de cellules unitaires au sein du motif périodique, en utilisant la méthode décrite précédemment en section 4.2.2. On rappelle que l'on calcul les déformations macroscopiques en utilisant les déplacements aux bords de la cellule extraite et que les contraintes sont calculés à partir de la moyenne des contraintes de Boussinesq

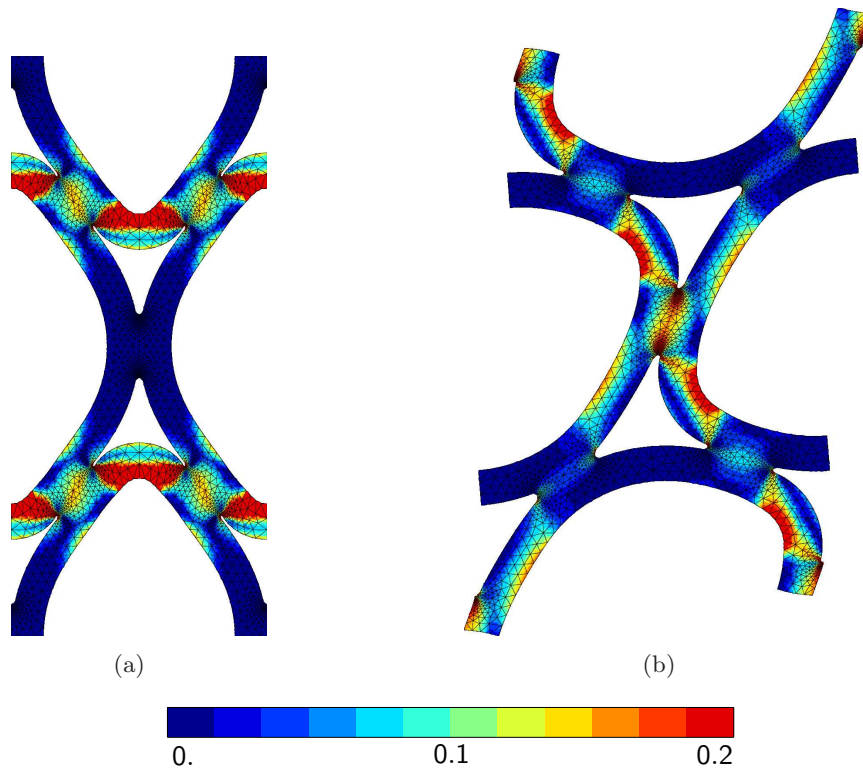


FIG. 4.17 – Cartographie de la déformation plastique cumulée de la cellule unitaire de l’empilement hexagonal (a) en compression suivant la direction X : $F_{11} - 1 = -0.2$ (b) en cisaillement : $F_{12} = F_{21} = 0.2$

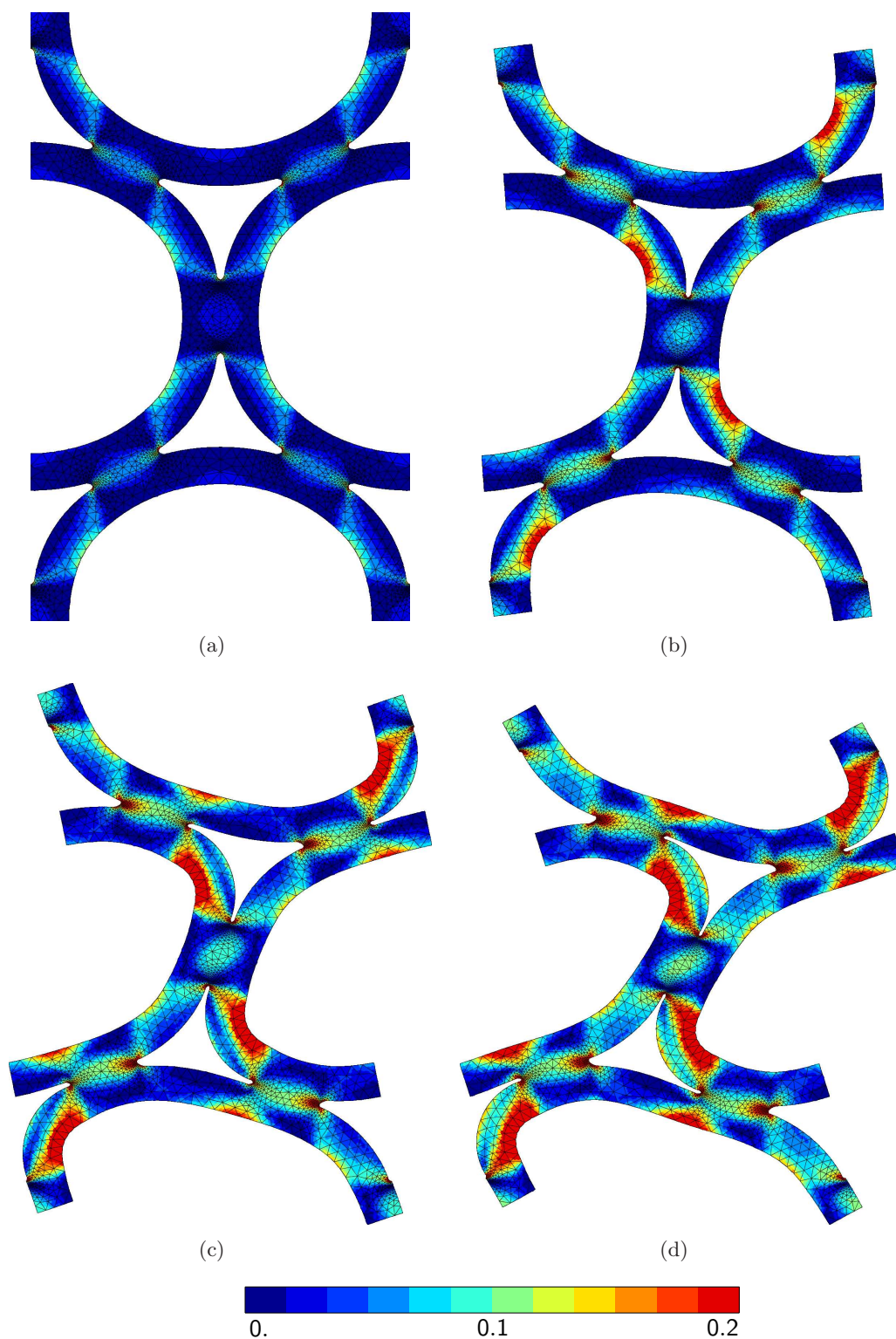


FIG. 4.18 – Cartographie de la déformation plastique cumulée de la cellule unitaire de l'empilement hexagonal lors de compressions suivant la direction Y ; (a) $F_{22} - 1 = -0.05$ (b) $F_{22} - 1 = -0.1$ (c) $F_{22} - 1 = -0.15$ (d) $F_{22} - 1 = -0.2$.

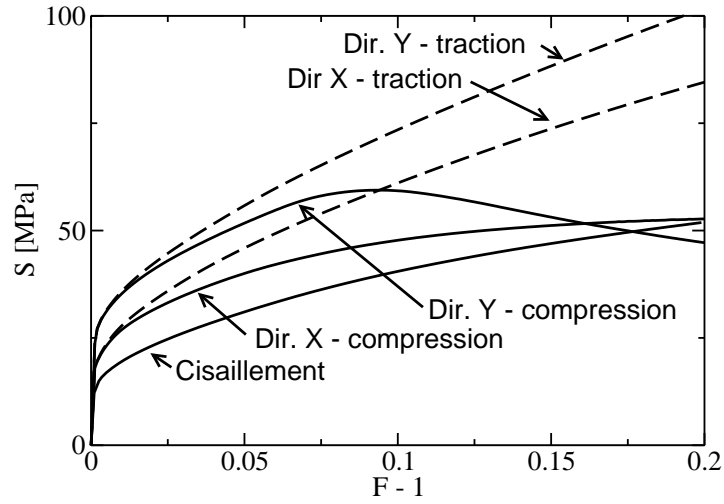


FIG. 4.19 – Réponses mécaniques de la cellule unitaire de l'empilement hexagonal lors de chargements uni-axiaux suivant les directions X et Y en traction et compression et du chargement en cisaillement dans le plan.

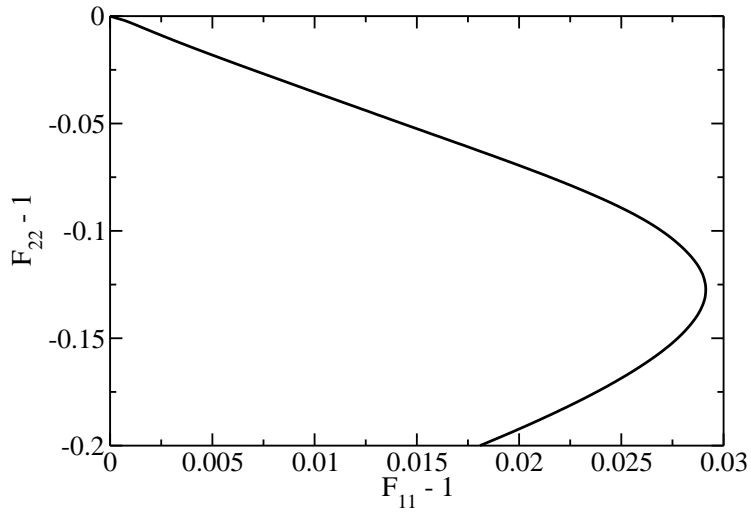


FIG. 4.20 – Courbes des déformations suivant la direction Y de chargement en compression / déformation suivant la direction X transverses

mésoscopiques. Les réponses effectives sont présentées en figure 4.21(c), on remarque que le comportement des cellules dans la bande de localisation est similaire à celui de la cellule unitaire. On observe également que l'instabilité provoque une décharge élastique dans les cellules voisines à la bande de localisation dans le motif périodique. On interprète le comportement post-instabilité plus faible de la cellule unitaire par le fait que le champ périodique de déformation est libre. En revanche, la bande de localisation a une taille caractéristique équivalente à une cellule, par conséquent les cellules au sein de la bande ont leur mode de déformation confiné par les cellules environnantes qui ne flambent pas. Ce résultat est comparable à celui de l'analyse de la cellule au sein du calcul de référence de l'empilement hexagonal sur la figure 4.13(b).

La question de la taille du VER a aussi été analysée pour des chargements bi-axiaux. On observe sur les figures 4.22(a,b) qu'une bande de localisation se développe, mais avec une largeur dépendante du rapport de bi-axialité. On remarque que la bande apparaît de manière aléatoire dans le motif périodique dépendamment des arrondis numériques. Ainsi, l'approche de validation par motif période de cellules unitaires pour un matériau présentant un comportement adoucissant présente une limitation importante. En effet, les conditions de périodicité sur le bord du motif force les déformations symétriques comme observé par Glüge (2013). La comparaison du comportement au sein de la bande de localisation avec la cellule unitaire n'est pas pertinente. On s'intéresse alors au cas du chargement équi-bi-axial, la déformation de la cellule unitaire est présentée sur la figure 4.23(a). On la compare par la suite à celles obtenues pour des motifs de 2×2 cellules unitaires (figure 4.23(b)) et de 8×8 cellules unitaires (figure 4.23(c)). On retrouve les résultats observées par Papka et Kyriakides (1999a,b) ou Okumura *et al.* (2004) sur les nids d'abeille, à savoir le mode de déformation en "fleur" des cellules. On remarque cependant que ce mode de déformation est différent de celui observé sur la cellule unitaire (figure 4.23(a)). Néanmoins, dans le cas du chargement sur le motif de 8×8 cellules unitaires avec déformation homogène aux bords, ce mode de déformation ne se retrouve que dans les bandes de localisation. Ces dernières sont obliques, comme illustré sur la figure 4.23(d). Le comportement du motif de 2×2 de cellules unitaires extrait du motif de 8×8 cellules unitaires a été comparé sur la figure 4.24. On constate que la réponse du motif extrait de la bande de localisation de la déformation du calcul avec déformations homogènes aux bords a une réponse mécanique plus raide que le motif de 2×2 de cellules unitaires périodique. L'analyse des réponses mécaniques pour des chargements uni-axiaux nous permettent de considérer le motif de 2×2 cellules unitaires comme VER du comportement de l'empilement hexagonal au sens de l'élasto-plasticité et de l'adoucissement.

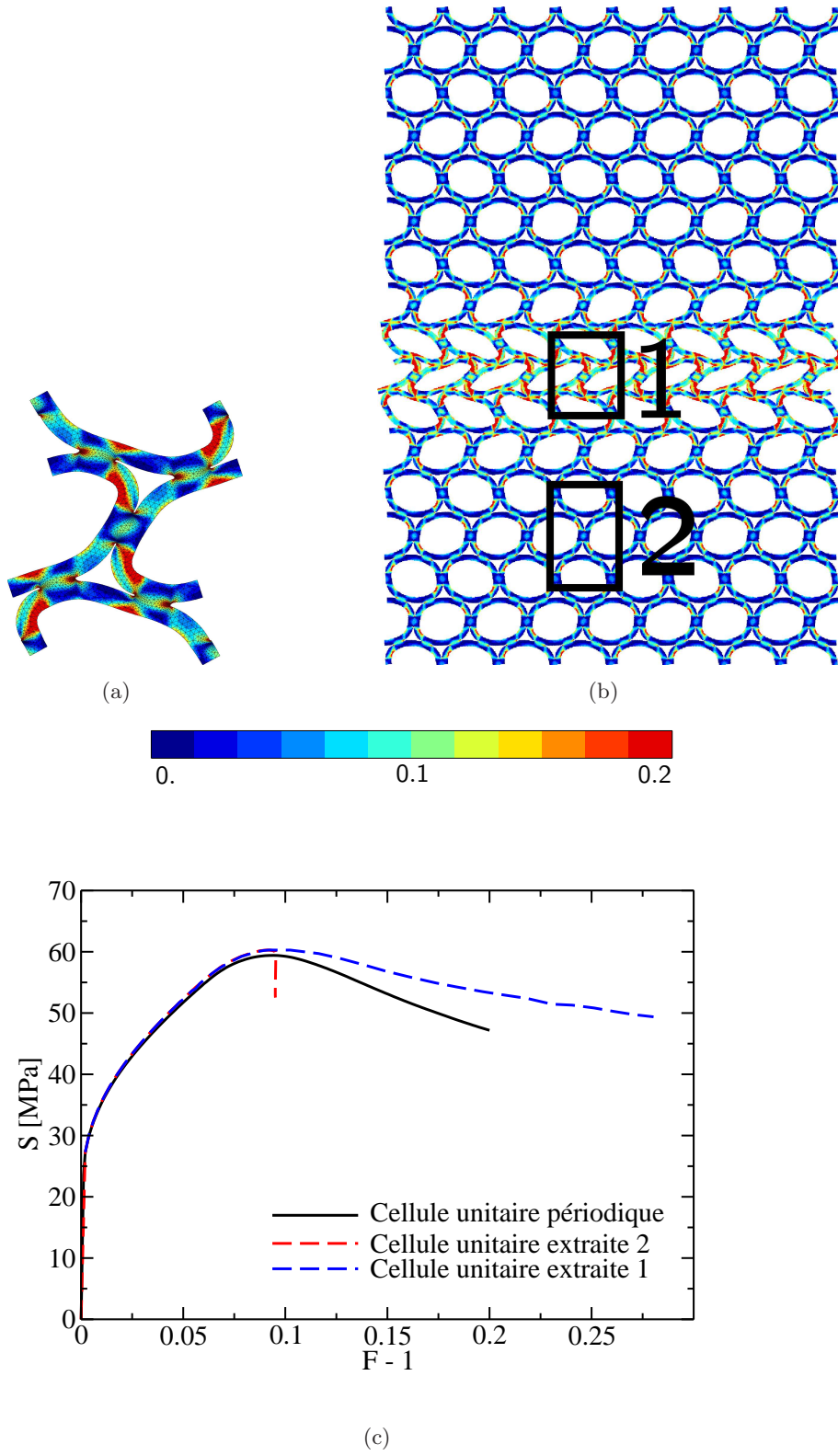


FIG. 4.21 – Cartographie de la déformation plastique cumulée lors de compressions sur l'empilement hexagonal en déformation imposée $F_{22} - 1 = -0.2$; (a) Cellule unitaire avec conditions de périodicité (b) motif de 8×8 de cellules unitaires avec conditions de périodicité, (c) courbes contraintes/déformations obtenues pour les différents cas précédemment cités.

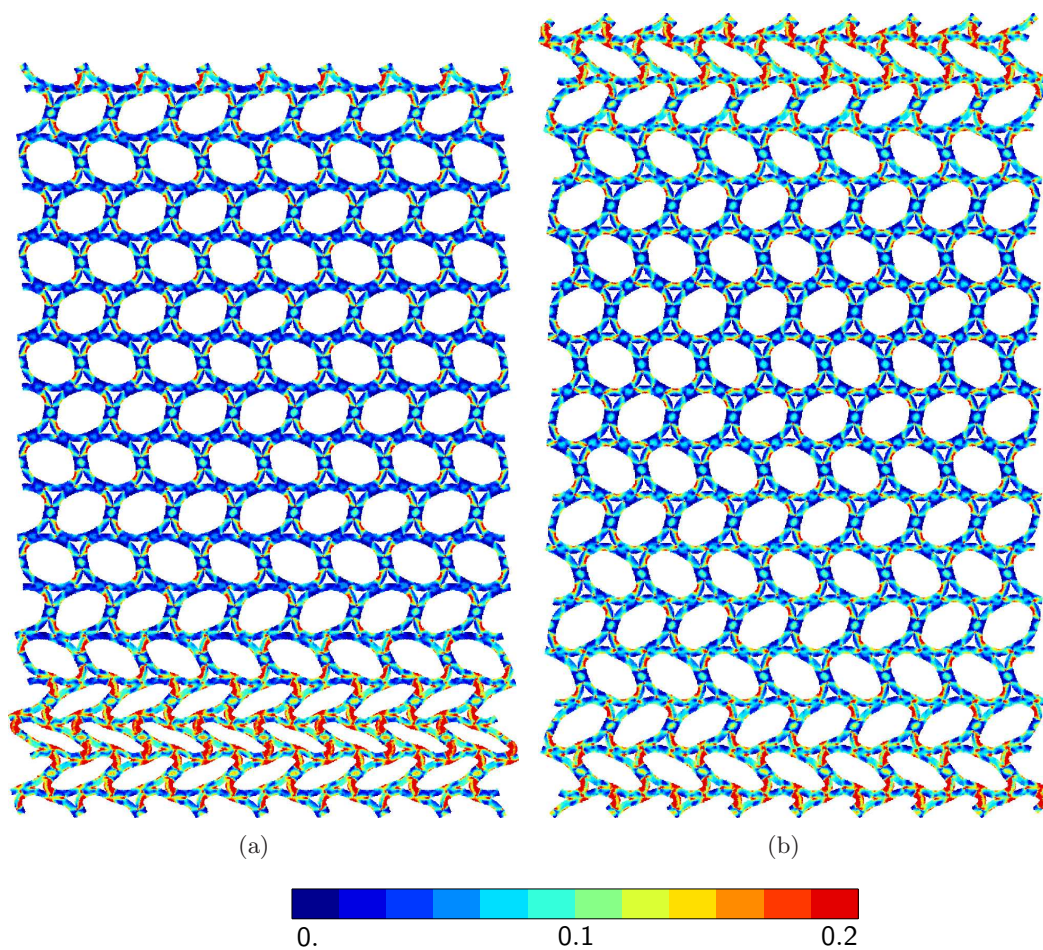


FIG. 4.22 – Cartographie de la déformation plastique cumulée lors de compressions sur motif de 8×8 cellules unitaires de l'empilement hexagonal conduit en déformation imposée ; (a) à 255° dans l'espace des déformations $F_{11} - 1 = -0.0966$ et $F_{22} - 1 = -0.0259$, (b) à 240° dans l'espace des déformations $F_{11} - 1 = -0.0867$ et $F_{22} - 1 = -0.05$.

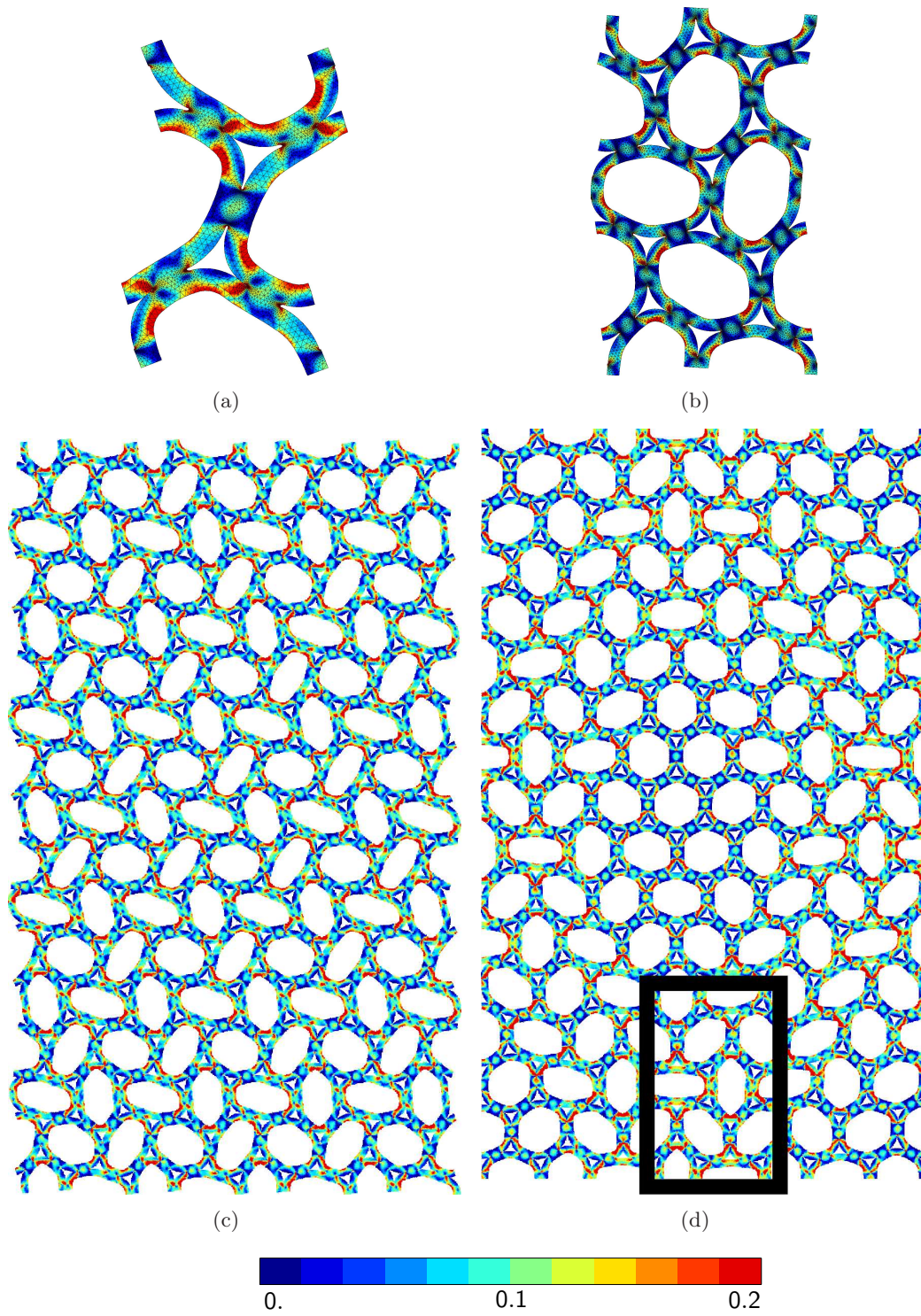


FIG. 4.23 – Cartographie de la déformation plastique cumulée lors de compressions sur l'empilement hexagonal conduit en déformation imposée $F_{11} - 1 = F_{22} - 1 = -0.1$; (a) Cellule unitaire avec conditions de périodicité (b) motif de 2×2 cellules unitaires avec conditions de périodicité (c) motif de 8×8 cellules unitaires avec conditions de périodicité (d) motif de 8×8 cellules unitaires avec conditions de déformations homogènes au bords.

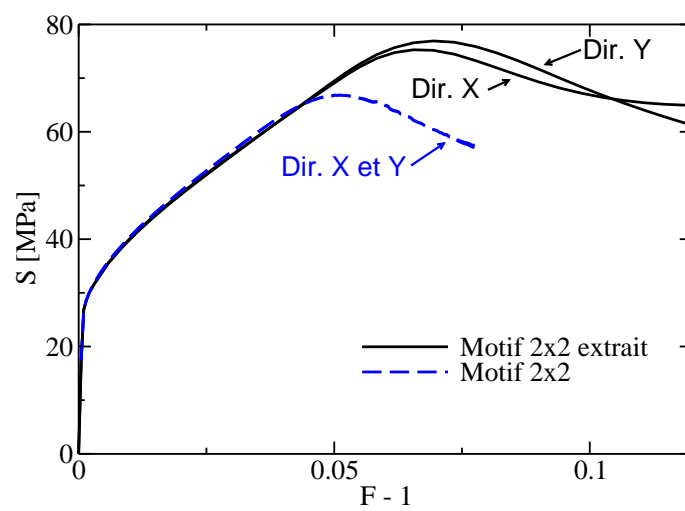


FIG. 4.24 – Courbes contraintes/déformations pour des chargements équi-bi-axiaux sur le motif de 2×2 cellules unitaires (figure 4.23(b)), (b) motif de 2×2 cellules unitaires extrait (figure 4.23(d)).

4.3.4 Caractérisation du comportement bi-axial de la cellule périodique

Dans l'optique d'étendre l'approche présentée dans le chapitre 3 en identifiant un modèle phénoménologique rendant compte du comportement en grandes déformations des empilements, on a procédé à une caractérisation bi-axiale du VER de chaque empilement. Nous nous sommes restreints à l'étude des chargements dans le plan transverse des tubes. En l'absence dans le code de calcul Z-set de la formulation en déformations planes généralisées pour la simulation d'une cellule périodique en grandes déformations, l'hypothèse des déformations planes a été utilisée. Néanmoins, quelques simulations en 3D ont été effectuées afin d'estimer l'erreur commise par un modèle extrudé de la géométrie.

La modélisation par la technique de l'homogénéisation périodique a été appliquée pour effectuer des simulations bi-axiales. La théorie de l'homogénéisation en grandes déformations utilisée a été présentée au chapitre 2 et son application dans le cas de cellule comportant du vide dans le code de calcul Z-set est décrite en annexe A. Par ailleurs, la construction de surfaces d'iso-valeurs d'une grandeur post-traitée, comme utilisée précédemment dans le chapitre 3, est détaillée dans l'annexe C.

Empilement carré

Dans un premier temps, nous présentons la caractérisation du comportement du VER de l'empilement carré. La figure 4.25 illustre le comportement du VER de l'empilement carré pour des chargements bi-axiaux monotones jusqu'à une déformation totale équivalente de Green-Lagrange ($\Xi_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}\Xi : \Xi}$). Les seuils $\Xi_{eq} = 0.01, 0.02, 0.05$ et 0.1 sont analysés. Les irrégularités de la surface à 10% de déformation équivalente est dû aux simulations en compression ayant des difficultés à converger en contraintes imposées car la réponse mécanique sature en contraintes, comme illustré précédemment sur la figure 4.16(d). On remarque la dissymétrie de comportement entre les chargements en traction bi-axiale et ceux en compression bi-axiale. La forme générale observée est anguleuse, avec un comportement identique dans les directions X et Y comme illustré sur la figure 4.15 pour des chargements uni-axiaux.

Empilement hexagonal

La méthode utilisée précédemment pour l'empilement carré a aussi été appliquée au VER de l'empilement hexagonal. Cependant, il a été observé sur la figure 4.19 que le comportement en compression est cette fois adoucissant. Par conséquent, l'identification du comportement est incompatible avec des chargements en contraintes imposées. Il faut alors utiliser des chargements en déformations macroscopiques imposées. Cependant, par cette méthode, le chemin suivi par les contraintes n'est plus proportionnel. Une comparaison des réponses mécaniques obtenues par cette méthode a néanmoins été menée pour valider la caractérisation en déformations imposées. Pour cela, dans le domaine des réponses durcissantes, notamment en traction, la caractérisation en contraintes imposées a été menée pour permettre la validation de la caractérisation en déformations imposées. Le comportement dans le plan transverse des tubes est illustré sur la figure 4.26. Le comportement inélastique est non-quadratique, anisotrope et dissymétrique entre la traction et

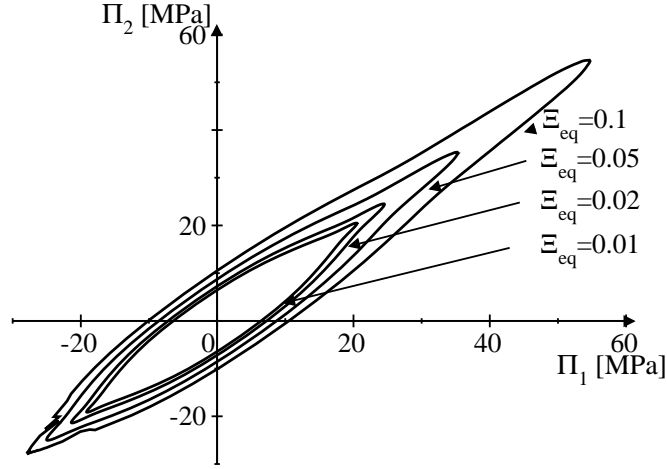


FIG. 4.25 – Iso-valeurs de la déformation totale équivalente du VER de l’empilement carré dans l’espace des contraintes principales

la compression. En outre, on remarque que, dès 5% de déformation totale équivalente de Green-Lagrange, la surface d’iso-valeurs se referme traduisant l’adoucissement. Puis, pour 10% de déformation totale équivalente de Green-Lagrange, le comportement est adoucissant en compression bi-axial lorsque la composante de déformation de la direction Y est dominante. Néanmoins, on remarque une forte anisotropie du comportement adoucissant car la compression sur le VER montre une réponse mécanique durcissante suivant la direction X.

Pour étudier l’instabilité du comportement, on utilise le critère du travail du second ordre (Hill, 1958; Mazière *et al.*, 2009). La condition sur les grandeurs de contraintes et de déformations macroscopiques $\dot{\tilde{\mathbf{S}}} : \dot{\tilde{\mathbf{F}}} \leq 0$, indique une bifurcation possible de la solution. On observe sur la figure 4.27 le front d’instabilité tracé avec la valeur des contraintes lorsque le critère n’est plus respecté à partir de l’ensemble des chargements en déformations imposées. Cependant, le chemin suivi par la contrainte n’est pas proportionnel. On propose alors des simulations suivant un chemin de contraintes proportionnel tout en effectuant le calcul en déformations imposées. Le contrôle du chemin est réalisé à l’aide d’un script pilotant les conditions de chargements macroscopiques ; il est présenté en annexe C. Les simulations sont alors menées en faisant respecter la proportionnalité de la contrainte de Boussinesq. La représentation des chemins dans l’espace des contraintes de Piola-Kirchhoff 2 est illustré sur la figure 4.27. On remarque tout d’abord que la caractérisation en déformations imposées donne des résultats satisfaisants en termes de valeurs de contrainte maximale. Néanmoins, on remarque également que, comme le critère $\dot{\tilde{\mathbf{S}}} : \dot{\tilde{\mathbf{F}}} \leq 0$ tient compte de l’ensemble des composantes, lorsque la simulation est pilotée en déformation, une composante adoucissante peut être masquée par une autre durcissante. Ainsi, ceci

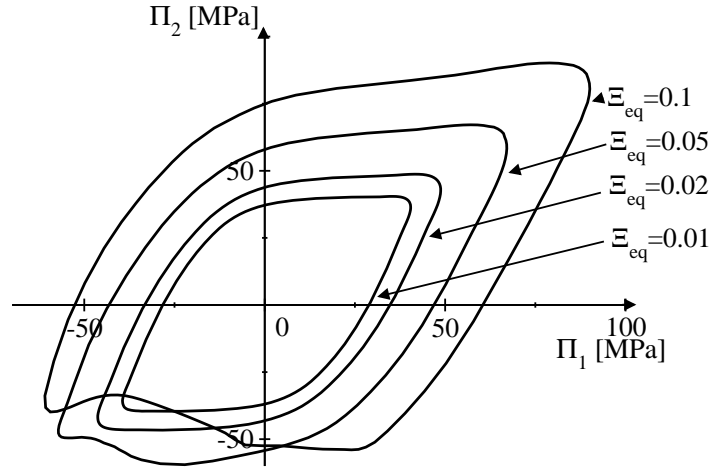


FIG. 4.26 – Iso-valeurs de la déformation totale équivalente du VER de l’empilement hexagonal dans l’espace des contraintes principales de Piola-Kirchhoff 2

explique la refermeture de la surface d’iso-valeurs de déformations totales équivalentes de Green-Lagrange sans que le critère n’indique de saturation de la réponse mécanique.

Afin de se placer dans le cadre des déformations planes généralisées, il est possible de simuler le comportement du VER par des calculs en 3D comportant un seul élément dans la profondeur avec des conditions de déplacement homogène dans la direction hors-plan. Cependant, le coût de calcul devient important donc la caractérisation exhaustive du comportement pour différents chargements multi-axiaux n’aurait pas pu être envisagée. La figure 4.28(a) illustre l’influence de l’hypothèse de déformations planes sur le comportement macroscopique de l’empilement hexagonal. Cette hypothèse conduit à surestimer fortement le comportement pour des chargements bi-axiaux. On remarque également sur la figure 4.28(b), qui représente la réponse mécanique pour un chargement uni-axial, que dans le cas des déformations planes, la réponse est plus raide alors que la contrainte maximale reste identique. On en conclut que le comportement adoucissant n’est déterminé par le chargement dans le plan transverse des tubes. La même caractérisation a également été menée pour le VER de l’empilement carré pour quelques points dans le plan. Dans ce cas, l’hypothèse des déformations planes donne des résultats satisfaisants.

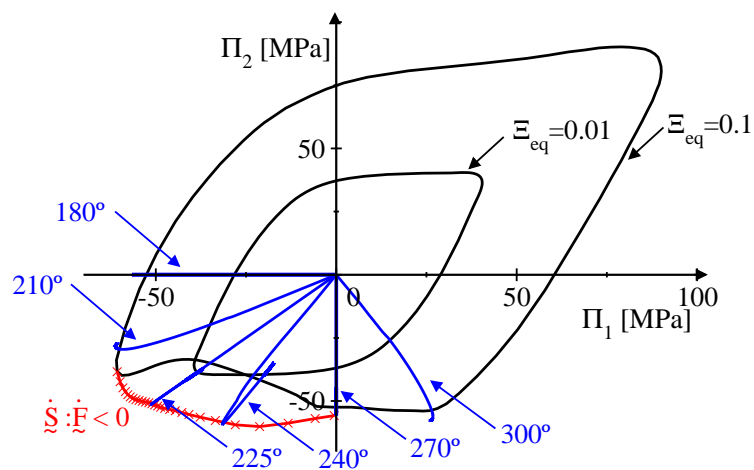
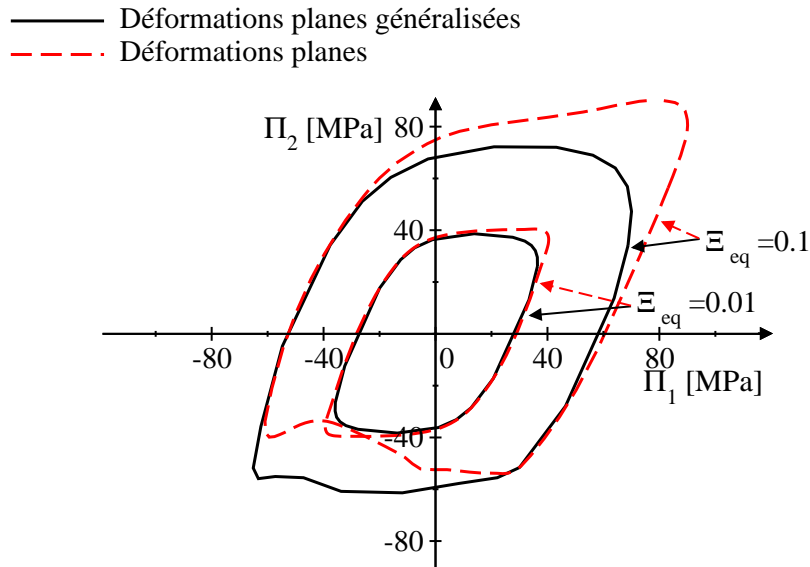
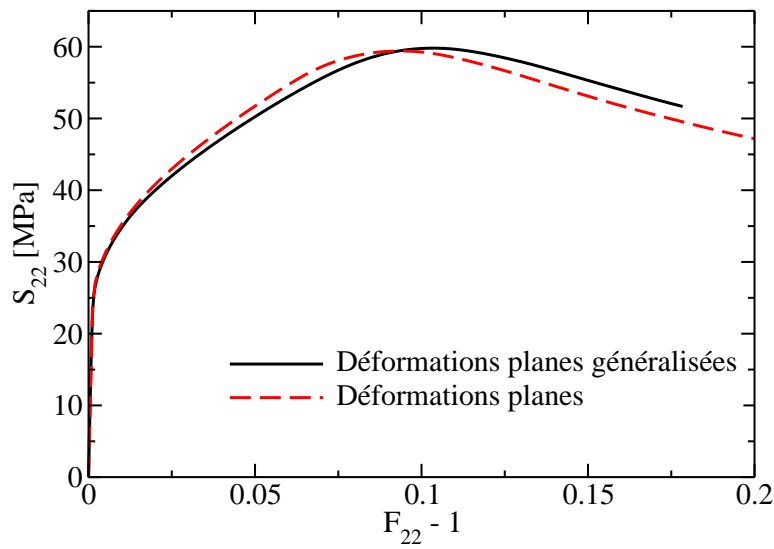


FIG. 4.27 – Courbes noires : iso-valeurs de la déformation totale équivalente du VER de l'empilement hexagonal dans l'espace des contraintes principales, courbe rouge : surface d'instabilité, courbes bleues : chargements proportionnels en contraintes de Boussinesq présentés dans l'espace lagrangien



(a)



(b)

FIG. 4.28 – (a) Iso-valeurs de la déformation totale équivalente de Green-Lagrange du VER de l'empilement hexagonal dans l'espace des contraintes principales, (b) chargement uni-axial en compression dans le direction Y. Courbes noires : simulation en déformations planes généralisées, courbes rouges : simulation en déformations planes.

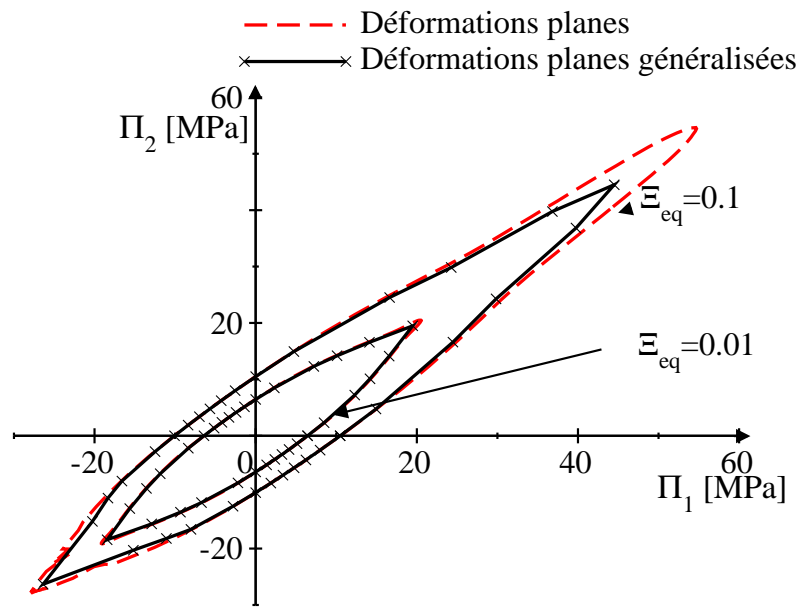


FIG. 4.29 – Iso-valeurs de la déformation totale équivalente de Green-Lagrange du VER de l'empilement carré dans l'espace des contraintes principales. Courbes noires : simulation en déformations planes généralisées, courbes rouges : simulation en déformations planes.

4.4 Identification d'une Loi Homogène Equivalente en grandes déformations

Un modèle phénoménologique basé sur la caractérisation du comportement inélastique des empilements de tubes jusqu'à de forts niveaux de déformations est maintenant proposé. Les deux empilements présentent un comportement compressible et une dissymétrie entre la traction et la compression. Cette dissymétrie se traduit particulièrement dans le cas de l'empilement hexagonal par un comportement adoucissant anisotrope auxétique en compression. De plus, si les deux directions du plan sont équivalentes pour l'empilement carré, ce n'est plus le cas pour l'empilement hexagonal qui montre une anisotropie suivant les deux directions du plan.

La formulation dans un repère local objectif de la loi de comportement en grandes déformations est utilisé ici, comme présenté en section 4.2 (équations (4.1) et (4.2)).

4.4.1 Empilement carré

La différence entre la traction et la compression est largement due à la compressibilité du matériau. En effet, les empilements ont initialement un taux de vide de l'ordre de 70% qui peut changer de manière importante au cours de la déformation. Le comportement inélastique évolue également avec le changement de géométrie, on observe un écrouissage plus faible en compression par rapport à la traction. Afin de modéliser ce comportement on propose de faire évoluer les paramètres de compressibilité avec le changement de volume. Ainsi le modèle de Green, calculé sur les contraintes $\underline{\mathbf{s}}$ de l'équation (4.2), prend la forme :

$$\Sigma_{eq}^2 = 3C(f)\Sigma_e^2 + F(f)\Sigma_m^2 \quad (4.3)$$

où f est le taux de vide.

L'évolution du taux de porosité par rapport à la déformation inélastique $\underline{\boldsymbol{\xi}}^{in} = \underline{\boldsymbol{\xi}}^t - \underline{\boldsymbol{\xi}}^e$ (où $\underline{\boldsymbol{\xi}}^t$ et $\underline{\boldsymbol{\xi}}^e$ sont respectivement le tenseur de déformation totale et élastique) est exponentielle et prend la forme :

$$f = 1 - (1 - f_0) \exp(-tr(\underline{\boldsymbol{\xi}}^{in})) \quad (4.4)$$

Sur la base des paramètres de la LHE identifiée précédemment en petites déformations (section 3.2), on introduit alors une modification des paramètres du critère avec l'évolution du taux de porosité ; celui-ci est directement lié au changement de volume du VER. Ainsi, pour un taux de vide initiale de l'empilement carré $f_0 = 0.71$ on propose l'évolution illustrée sur la figure 4.31. Cette discrétisation grossière d'une forme exponentielle est choisie par simplicité, on fait évoluer de manière linéaire le paramètre C de l'équation (4.3) autour du taux de porosité initiale jusqu'aux valeurs du taux de porosité minimum et maximum observées lors de la caractérisation du VER. Au delà de ces valeurs, la loi est simplement prolongée pour éviter les problèmes numériques.

On observe sur la figure 4.30(a) qu'une dissymétrie entre la traction et la compression est bien simulée par la LHE proposée. Pour des chargements uni-axiaux, la figure 4.30(b) illustre la différence de module d'écrouissage entre la traction et la compression. Le MHE proposé modélise donc de manière satisfaisante le comportement du VER de l'empilement carré. Néanmoins, la modélisation par la LHE du comportement fortement dissymétrique

du VER est perfectible, notamment par une identification de nouveaux paramètres de LHE. Ces résultats valident l'approche phénoménologique proposée pour étendre la LHE identifiée en petites déformations aux grandes déformations. En effet, le comportement de la LHE qui ne comprend pas d'évolution des paramètres du modèle ne rend pas compte de la dissymétrie entre la traction et la compression (figure 4.30(b)).

4.4.2 Empilement hexagonal

Dans l'optique de modéliser le comportement de l'empilement hexagonal, nous avons, dans un premier temps, souhaité utiliser la LHE de l'empilement hexagonal identifiée précédemment dans le cadre des petites déformations (section 3.2). Malheureusement, comme illustré sur la figure 4.32, un bug au sein du code de calcul Z-set nous a empêché d'appliquer la démarche d'extension de la LHE aux grandes déformations. En effet, la réponse mécanique du MHE en grandes déformations doit être proche de celle en petites déformations pour un faible niveau de déformation contrairement à ce qui observé sur cette figure. Au lieu du comportement non-quadratique, la surface est semblable au comportement isotrope d'un critère de von Mises. La découverte de ce bug a été tardive dans la chronologie des travaux présentés ici. Par conséquent, la modélisation des structures sandwichs par MHE en grandes déformations n'est pas actuellement possible avec le formalisme de LHE que nous aurions souhaité utiliser. Afin de contourner cette difficulté, nous avons donc proposé la formulation d'une loi de comportement rendant compte des comportements observés sur le VER de l'empilement hexagonal, mais uniquement dans le cadre des petites déformations, afin de pouvoir ensuite extrapoler le comportement aux grandes déformations à l'aide de l'expression de la loi de comportement dans un repère local objectif.

L'adoucissement observé sur le comportement de l'empilement hexagonal est un phénomène physique distinct du comportement élasto-plastique. On a donc choisi de le modéliser à l'aide d'un modèle qui nous a été proposé par J. Besson et M. Mazière lors de discussions personnelles. Ce critère a été développé pour des mousses en compression et prend la forme $s_{eq} - R(p) = 0$ avec :

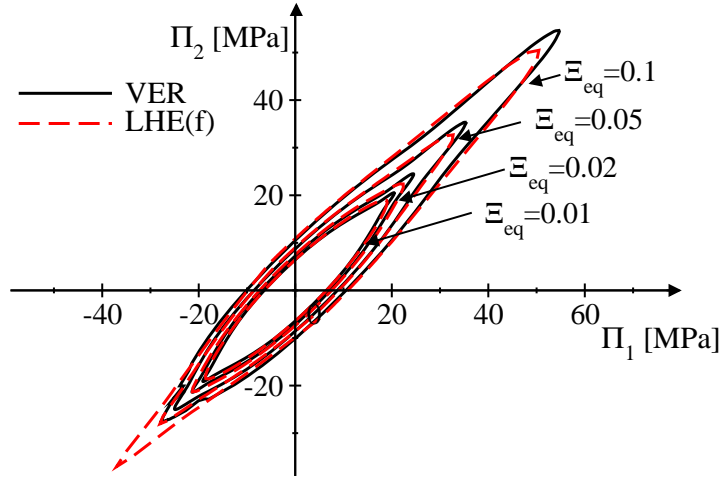
$$s_{eq} = \sqrt{\tilde{\mathbf{s}}^- : \tilde{\mathbf{s}}^-} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{L}} : \boldsymbol{\sigma} \quad (4.5)$$

avec :

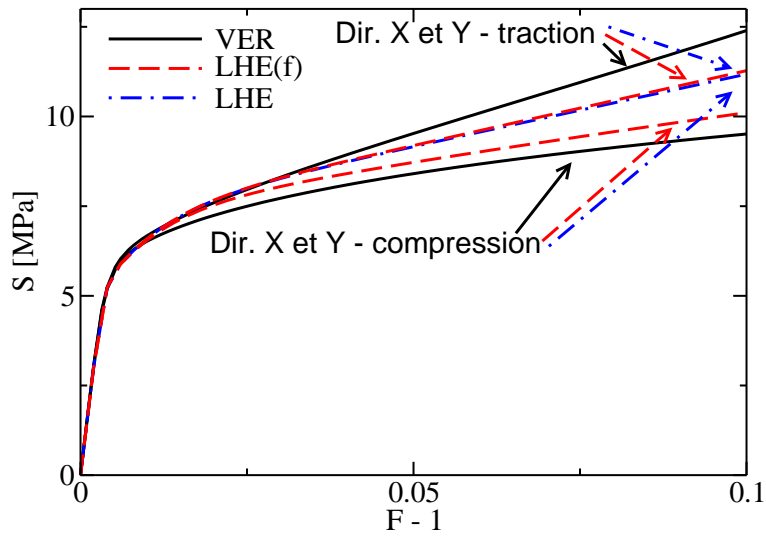
$$\tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_6 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

et où $\tilde{\mathbf{s}}^-$ est la partie négative du tenseur modifié des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$. La partie négative est calculée en remplaçant les valeurs propres positive de $\tilde{\mathbf{s}}$ par 0 puis en tournant ce tenseur dans le repère initial à l'aide des vecteurs propres.

La figure 4.33 illustre la LHE anisotrope non-quadratique compressible proposée précédemment en petites déformations (section 3.2) et le comportement du critère adoucissant



(a)



(b)

FIG. 4.30 – (a) Iso-valeurs de la déformation totale équivalente de Green-Lagrange du VER et du MHE de l'empilement carré dans l'espace des contraintes principales, (b) chargements uni-axiaux dans les directions X et Y en traction et en compression sur le VER et le MHE.

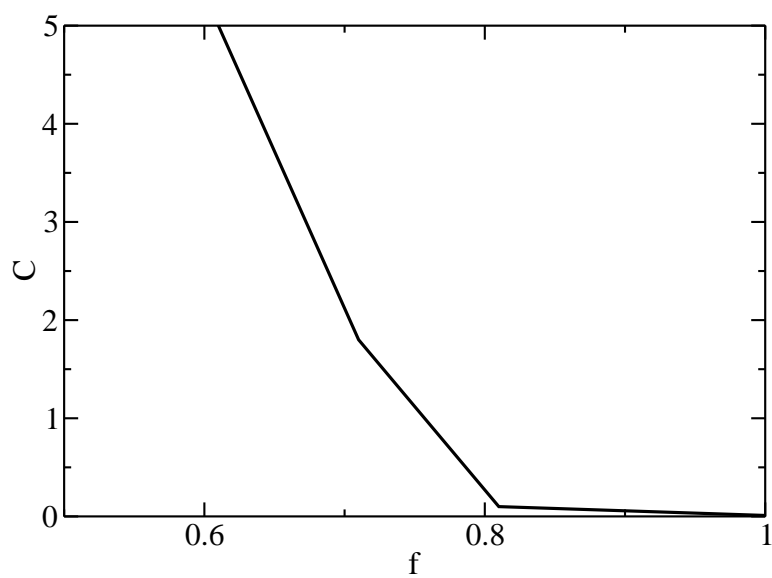


FIG. 4.31 – Loi d'évolution du paramètre C de l'équation (4.3) en fonction de f , le taux de porosité.

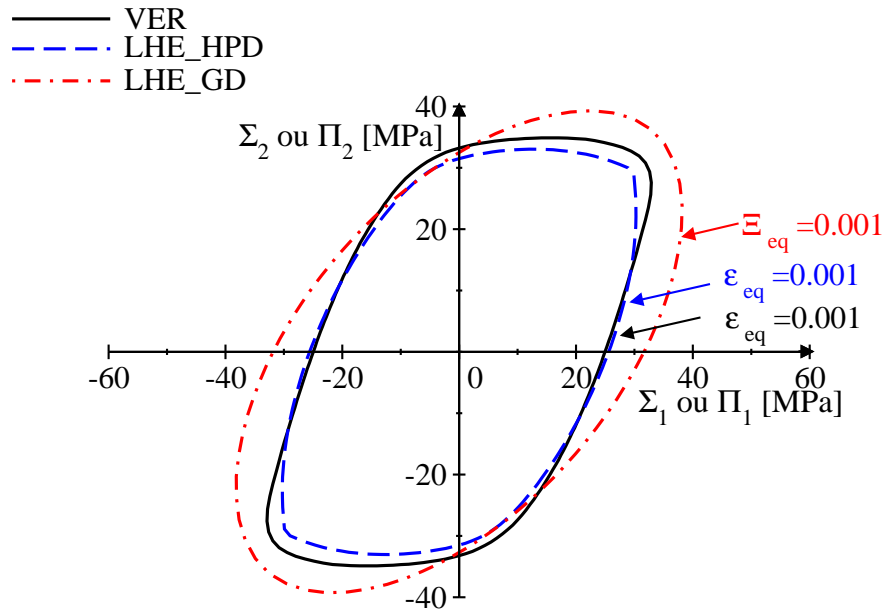


FIG. 4.32 – Iso-valeurs de la déformation totale équivalente dans l'espace des contraintes principales (courbe noire) du VER de l'empilement hexagonal, (courbe bleue) du MHE calculé en petites déformations, (courbe rouge) du MHE calculé en grandes déformations en rotation propre

proposé ici (courbe rouge). On remarque que le critère, présenté ici est dans sa forme isotrope (les paramètres l_i de $\underline{\underline{L}}$ sont pris égaux à 1), ne s'active que pour des compressions permettant ainsi de rendre compte que de comportement uniquement observé en compression.

On propose donc une formulation de LHE avec 2 mécanismes modélisés par 2 critères.

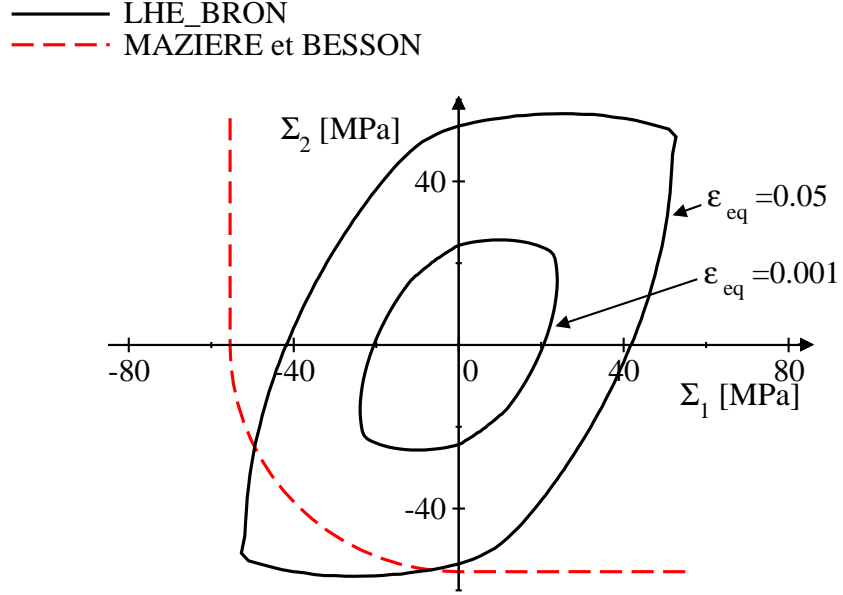


FIG. 4.33 – Iso-valeurs de la déformation totale équivalente dans l'espace des contraintes principales du MHE de l'empilement hexagonal.

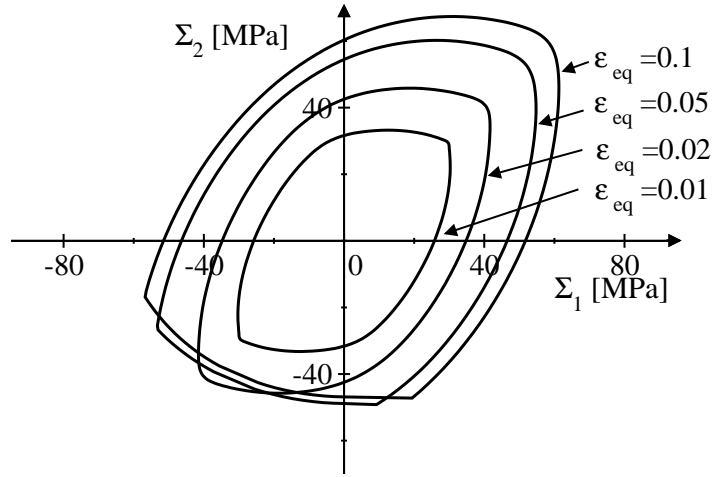
Ainsi le potentiel plastique est écrit comme la somme de deux potentiels, chacun s'activant en fonction de sa forme. Par conséquent, la normale d'écoulement est la somme de la contribution de chacun des critères (Besson *et al.*, 2009). On choisit un écrouissage isotrope $R^s(p)$ pour le second potentiel de la forme :

$$R^s(p) = \Sigma_y^s + H^s p \quad (4.7)$$

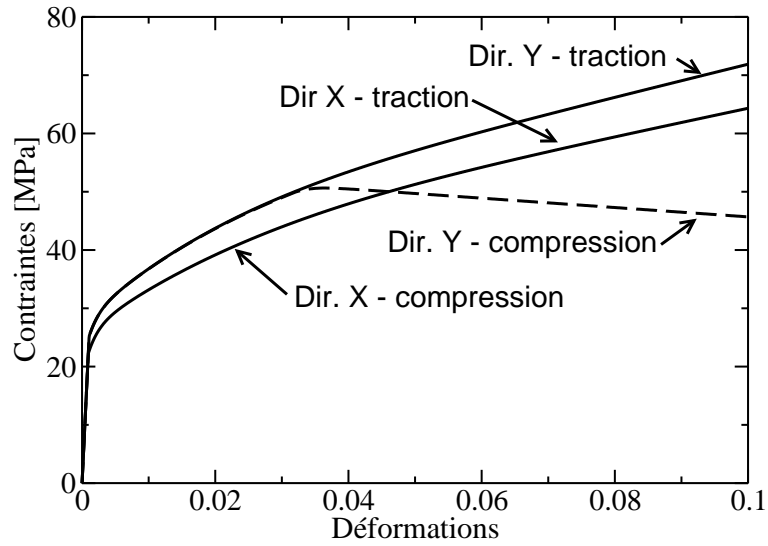
où Σ_y^s est la contrainte maximale et $H^s < 0$ le module d'écrouissage négatif. Ainsi, on peut modéliser le comportement adoucissant en compression au delà des contraintes maximales observées. L'écrouissage isotrope est choisi car nous nous sommes restreint à des chargements monotones. Sa forme linéaire négative est une idéalisation du comportement post-instabilité du VER de l'empilement hexagonal en compression.

La figure 4.34(a) montre la forme que prend la surface d'iso-valeurs de déformation totale pour des chargements bi-axiaux avec un comportement adoucissant pour $\Sigma_y^s = 53$ MPa, $H^s = -80$ MPa, $l_1 = 0.7$ et $l_2 = 1$ avec tout les autres paramètres de $\underline{\underline{L}}$ étant pris égaux à

1. Pour des chargements uni-axiaux, la figure 4.34(b) montre l'anisotropie de l'adoucissement et la contrainte maximale pour des chargements en compression dans la direction Y. De plus, pour des chargements en compression dans la direction Y, on observe un changement de direction d'écoulement rendant compte du comportement adoucissant auxétique. Cependant, nous n'avons pas intégré dans cette LHE la dissymétrie entre la traction et la compression avant adoucissement. Néanmoins, cette piste de formulation de LHE nous semble pertinente pour identifier un modèle phénoménologique modéliser le comportement en grandes déformations du VER de l'empilement hexagonal.



(a)



(b)

FIG. 4.34 – LHE proposée pour l'empilement hexagonal (Green + Bron(p) + modèle J.Besson et M. Mazière adoucissant) (a) Iso-valeurs de la déformation totale équivalente de Green-Lagrange du MHE de l'empilement hexagonal dans l'espace des contraintes principales, (b) chargements uni-axiaux dans les directions X et Y en traction et en compression sur le MHE

4.5 Conclusions

Cette partie a consisté en la caractérisation du comportement des empilements de tubes sous des chargements sévères en grandes déformations. En effet, la formulation des transformations finies permet de rendre compte des évolutions de l'architecture au cours du chargement.

La modélisation de structures sandwichs de tailles variables a été menée afin de déterminer l'influence des effets de bords sur leur comportement macroscopique. Pour cela, des structures de taille croissante et d'élancements variables ont été étudiées pour analyser des rapports entre la taille des cellules et la taille des structures différents. Des tendances identiques à celles obtenues lors des simulations en petites déformations ont été observées. De plus, l'effet de la taille reste assez faible. Le comportement stable de l'empilement carré est fortement influencé par la présence des peaux, l'effet de l'interaction entre le cœur et les peaux étant d'autant plus important que la hauteur de la structure sandwich diminue. L'empilement hexagonal montre un comportement macroscopique adoucissant. En effet, il a été observé en analysant le comportement de cellules extraites au sein du cœur cellulaire qu'un mode de déformation instable se développe générant un comportement effectif adoucissant.

Afin de caractériser le comportement bi-axial sur un Volume Élémentaire Représentatif, une étude sur des motifs de plusieurs cellules unitaires a permis d'étudier la forme et le comportement effectif dans le régime élasto-plastique et dans le régime adoucissant. Il en résulte que la cellule unitaire est le VER de l'empilement carré alors qu'un motif de 2×2 cellules unitaires correspond au VER de l'empilement hexagonal. Ainsi, par la suite, la caractérisation pour des chargements bi-axiaux a été menée sur ces deux types d'empilement.

L'empilement carré montre un comportement similaire à celui observé en petites déformations. Mais, la formulation en transformations finies rendant compte des changements de géométrie, une dissymétrie entre les comportements en traction et en compression est observée. L'empilement hexagonal montre des caractéristiques similaires à celles obtenues lors de la modélisation en petites déformations, mais l'analyse de cette caractérisation fait apparaître un comportement en compression instable.

Une Loi Homogène Equivalente pour chaque empilement a été proposée sur la base de l'extrapolation des LHE identifiées en petites déformations ainsi que leur modification pour rendre compte des comportements des deux types d'empilement. La dissymétrie entre les réponses mécaniques en traction et en compression est modélisée par l'évolution des paramètres du critère de plasticité en fonction du changement de volume. Le comportement adoucissant anisotrope de l'empilement hexagonal est modélisé par un second critère de plasticité qui ne s'active qu'en compression. La LHE proposée est en mesure de rendre compte du comportement de l'empilement hexagonal, néanmoins, nous sommes actuellement dans l'impossibilité de mener l'identification à cause d'un problème numérique qui empêche l'utilisation du formalisme proposé en grandes déformations. Le bug a été identifié en fin de thèse, ne laissant pas le temps de réaliser le travail de correction nécessaire. Par conséquent, la modélisation de structures sandwichs pour des chargements sévères avec MHE n'a pas pu être réalisée dans ce travail.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Ce travail a pour objectif d'identification de Lois Homogènes Equivalentes du comportement des matériaux cellulaires et leur application au calcul de structures sandwichs de grandes dimensions. Dans le cadre de ces travaux, les empilements de tubes, suivant un arrangement carré ou hexagonal, ont été considérés comme matériaux modèles.

Nous avons identifié un modèle phénoménologique du comportement mécanique des empilements grâce à la simulation par éléments finis en homogénéisation périodique de différents chargements sur leur VER respectifs. L'étude a permis de montrer la différence entre chacune des architectures. Nous avons observé que, pour des densités relatives proches, la différence de raideur est importante : l'empilement hexagonal est plus de deux fois plus raide que l'empilement carré.

L'analyse de la forme du comportement élasto-plastique a montré une grande différence de comportement ; et ceci particulièrement dans les directions du plan transverse à l'axe des tubes. En effet, c'est l'architecture à l'échelle mésoscopique qui gouverne l'anisotropie et la compressibilité du matériau. L'empilement carré présente une surface-seuil de plasticité de forme non-quadratique avec une réponse identique des chargements uni-axiaux dans le plan, ainsi qu'une différence de raideur en plasticité entre la traction et la compression pour des niveaux de déformation plus importants. Cependant, sa forme peut être efficacement approchée par une forme quadratique. En revanche, l'empilement hexagonal a une surface-seuil anisotrope non-quadratique qui évolue de manière très marquée avec la déformation. Comme pour l'empilement carré, on observe une dissymétrie des comportements en traction et en compression. En effet, en plus de la différence de raideur en fonction du sens du chargement suivant la direction Y, le comportement de l'empilement hexagonal devient adoucissant en compression au delà du chargement maximal que peuvent supporter les parois des tubes et les brasures avant flambage.

La modélisation en compression de structures sandwichs de taille finie a permis d'analyser les champs de déformation au sein du cœur cellulaire et de caractériser l'influence des effets de bords en fonction de la taille de la structure macroscopique. L'effet de taille observé est considéré comme faible pour les deux types d'empilement. Cependant, le comportement macroscopique des structures sandwichs dont le cœur est un empilement carré de tubes est dominé par le confinement de la déformation transverse au voisinage des peaux. Alors que l'étude de structures sandwichs de différentes tailles avec un cœur en empilement hexagonal de tubes n'a pas mis en évidence une influence forte de la présence des peaux ou des

bords libres sur le comportement macroscopique.

L'empilement hexagonal présente des caractéristiques intéressantes pour son utilisation dans des structures sandwichs : une grande raideur ainsi et une forme d'écoulement inélastique induisant moins de déformations transverses. Néanmoins, sa densité relative, bien que proche de celle de l'empilement carré, est supérieure à géométrie de tubes identique. Une Loi Homogène Equivalente a été identifiée en petites déformations pour chacun des empilements de tubes. Les critères de plasticité utilisés sont basés sur un terme modélisant l'anisotropie et la forme de l'écoulement et sur un autre terme additionné rendant compte de la compressibilité, elle-même anisotrope. En outre, dans le cas de l'empilement carré en grandes déformations, une évolution des paramètres du modèle est proposée pour rendre compte de la dissymétrie entre la traction et la compression. Le comportement de l'empilement carré est ainsi modélisé avec succès. En revanche, dans le cas de l'empilement hexagonal, la LHE identifiée en petites déformations reste à étendre aux grandes déformations à cause d'une erreur non-corrigée dans le code de calcul utilisé pendant ces travaux. Néanmoins, un formalisme est proposé pour modéliser le comportement de l'empilement hexagonal sous la forme de deux critères de plasticité permettant de prédire d'une part le comportement élasto-plastique et, d'autre part, le comportement adoucissant anisotrope. Les modélisations en petites déformations des structures sandwichs avec Milieu Homogène Equivalent ont montré que cette approche est efficace. En effet, les réponses mécaniques sont satisfaisantes par rapport aux simulations de référence et les gains en termes de temps de calcul vont de 2 à 3 ordres de grandeur. L'extension future de la modélisation par MHE en grandes déformations du matériau modèle nécessite des corrections du code de calcul Z-set afin de permettre l'utilisation des LHE proposées en transformations finies. Cependant, cette approche semble prometteuse pour la modélisation structurale d'architectures cellulaires en grandes déformations, pour lesquelles des calculs complètement maillés seraient prohibitifs en termes de temps de calcul.

Directions de recherche proposées sur la base des travaux présentés

Comme cela a été évoqué dans les conclusions, les résultats obtenus sont une étape dans le processus de mise en place d'une méthode de modélisation des structures macroscopiques intégrant un matériaux cellulaire pour des chargements sévères. Ces travaux ont mis en avant un certain nombre de limitations, qu'elles soient d'ordre numérique (programmation des modèles) ou physique (phénomènes complexes qui n'ont pas, ou que partiellement, été pris en compte), qu'il est nécessaire de traiter afin d'étendre l'approche proposée et de modélisation par un MHE des architectures cellulaires. Dans ce but, plusieurs axes de recherche sont proposés ici.

Modélisation du comportement local au sein du VER

La caractérisation des deux types d'empilement de tubes a été menée entre l'échelle mésoscopique et l'échelle macroscopique. Ainsi, le comportement inélastique a été caractérisé en prenant en compte les effets de l'architecture avec un matériau constitutif

élasto-plastique isotrope. Une des forces de la technique de l'homogénéisation est de pouvoir choisir un Volume Élémentaire Représentatif pouvant inclure toutes les complexités des hétérogénéités, en termes de géométrie des phases et de leurs lois de comportement. L'hypothèse d'homogénéité de comportement dans les brasures et les parois des tubes a été utilisée dans ce travail de thèse sur la base des travaux de Marcadon et Kruch (2011). Cependant, il a été observé que l'échelle microscopique présente des caractéristiques qui peuvent avoir une influence importante sur le comportement macroscopique, particulièrement au niveau des joints de brasure qui sont fortement sollicités lors de la majorité des chargements. Ainsi, une description plus physique de ces derniers serait nécessaire pour caractériser le comportement effectif de l'architecture. Ainsi, sur la base des observations des microstructures des brasures et de leur rupture partielle observée lors des essais sur structures sandwichs, l'homogénéisation d'un VER incluant un modèle d'endommagement dans les joints de brasure est un axe d'étude qu'il sera nécessaire d'explorer pour l'identification d'un modèle phénoménologique qui permettrait la comparaison essai/calcul.

Etude des chargements non-monotones sur le VER

Les chargements simulés dans ce travail de thèse ont tous été des chargements monotones avec un matériau constitutif modélisé par un écrouissage isotrope. Si l'on s'intéresse à des chargements cycliques, l'utilisation d'un écrouissage cinématique sera nécessaire pour modéliser le comportement du matériau constitutif. Cependant, l'introduction d'un écrouissage cinématique est susceptible de modifier les réponses mécaniques en chargement monotone. En effet, localement, les champs sont déterminés par les hétérogénéités et peuvent suivre un chemin de chargement quelconque. Dans le cas de chargements cycliques, l'étude du comportement cinématique à l'échelle macroscopique en fonction du comportement cinématique à l'échelle mésoscopique serait intéressant pour caractériser les effets de l'architecture.

Par ailleurs, dans l'optique de caractériser le comportement macroscopique, la méthode de construction des surfaces seuils d'iso-valeurs d'une grandeur post-traitée devrait être adaptée pour étudier l'évolution de la forme de la surface après déformation plastique. Il serait alors possible d'étudier les distorsions des surfaces de charge en fonction de la direction suivie par le chargement, comme illustré dans les travaux de Pietryga *et al.* (2012). Cette approche permettrait de caractériser l'influence d'une déviation du chemin de chargement proportionnel sur la direction de l'écoulement plastique.

Modélisation du comportement adoucissant et milieu à microstructure

La modélisation par éléments finis d'un comportement adoucissant présente des limitations quant à l'unicité de la solution du problème mécanique. En effet, une localisation pathologique de la déformation se développe aléatoirement dans un élément uniquement. L'utilisation d'un *limitateur de localisation* serait alors nécessaire afin de pallier cette limitation de la méthode. De plus, cette approche permettrait de modéliser la taille caractéristique de la bande de localisation observée sur les simulations de référence complètement maillées. En outre, la singularité qui se développe sur le bord libre à l'interface entre la peau et les tubes serait régularisée à l'aide de la présence d'une longueur interne. Deux

approches seraient pertinentes : d'une part l'utilisation d'un modèle non-local (Driemeier *et al.*, 2005) et d'autre part, l'utilisation d'un milieu continu généralisé (Forest et Sievert, 2006; Dillard *et al.*, 2006; Forest et Trinh, 2011).

Modélisation de la densification

La modélisation du contact qui se développe au sein de l'empilement en compression est un enjeu pour pouvoir étudier l'ensemble de la capacité de dissipation par déformation plastique d'un matériau cellulaire. En effet, après l'écrasement des cellules sur elles-mêmes, le contact entre les parois des tubes vient raidir la réponse mécanique jusqu'à la refermeture du vide dans les cellules (Alart *et al.*, 2004). Ceci implique qu'une autre bande de localisation se développe ailleurs dans le cœur cellulaire jusqu'à densification complète de la structure sandwich. La comparaison essai/calcul au delà du premier contact n'est donc possible qu'en intégrant dans un modèle phénoménologique la densification du matériau.

Application de l'homogénéisation pour des chargements dynamiques

Finalement, l'étude du comportement à l'impact implique une caractérisation du matériau sous des chargements dynamiques. Dans ce cas, les forces d'inertie dans le cœur cellulaire ne sont plus négligeables et l'étude en dynamique d'un VER nécessite de rendre compte des effets des forces volumiques dues aux accélérations (Boutin et Auriault, 1990; Molinari et Mercier, 2001; Pham *et al.*, 2013). Dans ce domaine, les outils numériques nécessaires à la réalisation des calculs dans le cadre de l'homogénéisation périodiques sont à développer.

Annexe A

Homogénéisation périodique en grandes déformations et application avec présence de vide dans Z-set

Cette annexe a pour but de présenter l'utilisation numérique de l'homogénéisation périodique. Ainsi, dans l'objectif de déterminer et de quantifier le comportement mécanique effectif d'un matériau cellulaire numériquement, son application avec le code de calcul Z-set (www.zset-software.com) est présenté pour un Volume Élémentaire Représentatif comportant du vide.

Les lecteurs qui s'intéressent à la procédure d'homogénéisation à l'aide de Z-set en petites déformations sont invités à lire l'annexe A du manuscrit de thèse de J. Dirrenberger (Dirrenberger, 2012).

Mise en données d'un calcul périodique dans Z-set

L'homogénéisation en grandes déformations dans Z-set permet la manipulation de plusieurs grandeurs macroscopiques lagrangiennes et euleriennes en fonction de la configuration de calcul choisie. La discretisation spatiale doit respecter la contrainte de noeuds homologues sur le maillage afin de pouvoir relier les composantes de la partie périodique du déplacement. Un maillage répondant à ce critère peut notamment être construit par une opération de symétrie. Le blocage des mouvements de corps rigide en translation s'effectue en imposant les composantes de la partie périodique du déplacement nulles sur un noeud du maillage. En grandes déformations, les rotations macroscopiques qui sont incluses dans la partie non-symétrique de la déformation macroscopique $\tilde{\mathbf{F}}$ sont bloquées en forçant la symétrie du tenseur $\tilde{\mathbf{F}}$.

On présente ici le contenu type d'un fichier de mise en données d'un calcul périodique en grandes déformations, dans un cas 2D et en déformations planes, dans le code de calcul

par éléments finis Z-set :

```
%définition du maillage
****calcul
***mesh
**file maillage.geof
%attribution du formalisme aux éléments du maillage
**elset ALL_ELEMENT total_lagrangian_plane_strain_periodic
    periodic_info total_displacement_field
%pilotage du calcul (pas de temps et convergence)
***resolution newton
**sequence
*time 1.
*iteration 10
*increment 100
*ratio 0.1
*algorithm p1p2p3
**automatic_time global 10
*divergence 2. 10
*security 1.5
%définition des conditions limites
***bc
%pilotage du calcul en déformation
**impose_elset_dof
    ALL_ELEMENT E22 0.01 time % -> F_22=1.01
%**impose_elset_dof_reaction si l'on souhaite piloter en contrainte
%ALL_ELEMENT E22 10. time % -> S_22=10./volume_maillage en mm2
%blocage des mouvements de corps rigide
**impose_nodal_dof
    coin_bas_gauche U1 0.
    coin_bas_gauche U2 0.
%liaison des déplacements des noeuds homologues
***equation
**mpc2 haut U1 bas U1
**mpc2 haut U2 bas U2
**mpc2 droite U1 gauche U1
**mpc2 droite U2 gauche U2
%symétrisation du tenseur des déformations macroscopiques
**mpc2_dof_elset ALL_ELEMENT E12 ALL_ELEMENT E21
%définition du matériau
***material
*file behavior.mat
***output
**contour
**value_at_integration
```

```

**contour_by_element
**curve
%sorties des déformations et réactions macroscopiques
%E11=F_11 - 1.
%RE11=S_11*volume_maillage
*elset_var ALL_ELEMENT E11 E22 E12 RE11 RE22 RE12
****return

```

Opérations de moyenne en présence de vide

En présence de plusieurs phases, la moyenne $\langle \mathbf{F} \rangle$ sur le volume V_Ω des gradients mésoscopiques de la transformation \mathbf{F}_m s'écrit :

$$\langle \mathbf{F}_m \rangle = \frac{1}{V_\Omega} \int \mathbf{F}_m dV = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{V_{\Omega^\alpha}} \int_{\Omega^\alpha} \mathbf{F}_m^\alpha dV \quad (\text{A.1})$$

où α représente l'indice de la phase pour n phases présentes. La moyenne des contraintes de Boussinesq \mathbf{S} s'écrit également :

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{V_{\Omega^\alpha}} \int_{\Omega^\alpha} \mathbf{S}_m^\alpha dV \quad (\text{A.2})$$

Pour un matériau bi-phasé dont une des phases est le vide, et pour lequel on ne modélise que la phase solide on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}_m \rangle &= (1-f) \langle \mathbf{F}_m^1 \rangle + f \underbrace{\langle \mathbf{F}_m^2 \rangle}_{\text{inconnus}} \\ &\neq (1-f) \langle \mathbf{F}_m^1 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

et

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_m \rangle &= (1-f) \langle \mathbf{S}_m^1 \rangle + f \underbrace{\langle \mathbf{S}_m^2 \rangle}_0 \\ &= (1-f) \langle \mathbf{S}_m^1 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

où les indices 1 et 2 indiquent respectivement les phases de matière et de vide, f étant la fraction volumique de vide dans le VER. Grâce à une opération de moyenne sur les grandeurs dans la phase solide on a accès aux contraintes macroscopiques. En revanche, la déformation macroscopique ne peut pas être calculée par une simple opération de moyenne sur les grandeurs dans la phase solide. En effet, ne modélisant pas le vide, nous n'avons pas accès à la déformation de la phase de vide qui n'est pas nulle. On peut néanmoins calculer le gradient des déplacements aux bords du VER pour obtenir la déformation macroscopique.

Exploitation des degrés de liberté macroscopiques

Une alternative plus simple pour remonter aux grandeurs macroscopiques consiste à utiliser les degrés de liberté macroscopiques de la formulation éléments finis de Z-set. L’affichage de ces grandeurs en sortie de calculs se fait par l’ajout, dans le cas général en 3D, de la commande suivante dans le fichier de mise en données :

```
**curve
  *elset_var ALL_ELEMENT E11 E22 E33 E12 E23 E13
RE11 RE22 RE33 RE12 RE23 RE13
```

où les composantes E_{ij} sont égales à :

$$E_{ij} = F_{ij} - \delta_{ij} \quad (\text{A.5})$$

avec F_{ij} sont les composantes du gradient de la transformation macroscopique $\tilde{\mathbf{F}}$ et δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Les RE_{ij} [N.m] sont les composantes des réactions macroscopiques qui dépendent de la formulation de résolution des éléments finis en grandes déformations choisie. Cette grandeur est directement liée à la taille du VER, une étape de moyenne en fonction du volume du VER est nécessaire. Les différentes formulations possibles sont :

- la formulation **total_lagrangian_periodic** qui nécessite de pondérer RE_{ij} par le volume de maillage de la configuration de référence pour obtenir la contrainte de Boussinesq ;
- la formulation **final_lagrangian_periodic** qui nécessite de pondérer RE_{ij} par le volume de maillage de la configuration déformée pour obtenir la contrainte de Cauchy ;
- la formulation **increment_lagrangian_periodic** qui nécessite de pondérer RE_{ij} par le volume de maillage de la configuration en début d’incrément de calcul pour obtenir la contrainte de Boussinesq ;
- la formulation **updated_lagrangian_periodic** qui nécessite de pondérer RE_{ij} par le volume de maillage de la configuration en fin d’incrément de calcul pour obtenir la contrainte de Cauchy ;

On note RE_{ij}^{total} les réactions macroscopiques obtenues par la formulation **total_lagrangian_periodic** et RE_{ij}^{final} les réactions macroscopiques obtenues par la formulation **final_lagrangian_periodic**.

On note également le volume du VER dans configuration de la référence V_{VER} et celui dans la configuration déformée v_{ver} . La contrainte de Boussinesq s’écrit :

$$S_{ij} = \frac{1}{V_{mesh}} \frac{V_{mesh}}{V_{VER}} RE_{ij}^{\text{total}} = \frac{1}{V_{VER}} RE_{ij}^{\text{total}} \quad (\text{A.6})$$

où V_{mesh} est le volume du maillage non déformé. La contrainte de Cauchy s’écrit :

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{v_{mesh}} \frac{v_{mesh}}{v_{ver}} RE_{ij}^{\text{final}} = \frac{1}{v_{ver}} RE_{ij}^{\text{final}} \quad (\text{A.7})$$

où v_{mesh} est le volume du maillage déformé.

De plus, il est important de remarquer que les tenseurs $\tilde{\mathbf{F}}$ et $\tilde{\mathbf{S}}$ sont, en général, des

tenseurs non-symétriques. Cependant, en homogénéisation périodique la composante de rotation étant nulle ces tenseurs sont symétriques.

Pour obtenir la contrainte eulerienne de Cauchy macroscopique, dans le cadre de l'homogénéisation en grandes déformations, il ne faut pas calculer la moyenne des contrainte de Cauchy mésoscopiques $\boldsymbol{\sigma}$ mais il faut utiliser les degrés de liberté macroscopique de la formulation `final_lagrangian_periodic` ou faire le transport de la contrainte mixte de Boussinesq :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{J} \boldsymbol{S} \boldsymbol{F}^T \neq \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (\text{A.8})$$

où J est le déterminant du tenseur macroscopique \boldsymbol{F} . Il est alors possible de travailler avec les grandeurs macroscopiques pour définir une mesure de la déformation de type Green-Lagrange :

$$\boldsymbol{\Xi} = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} - \mathbf{1} \right) \quad (\text{A.9})$$

ainsi que la contrainte lagrangienne :

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{F}^{-1} \boldsymbol{S} \quad (\text{A.10})$$

Annexe B

Déformations planes généralisées

Les déformations planes généralisées permettent la modélisation de problèmes où la géométrie 3D peut être réduite à une géométrie 2D, tout en modélisant les déformations hors-plan. Elles n'aboutissent ni à une surestimation de la raideur comme en déformations planes, ni à une sous-estimation comme en contraintes planes. On considère la normale à cette surface plane comme étant l'axe longitudinal. Six degrés de liberté sont ajoutés à chaque élément du maillage 2D $[t_1 \ t_2 \ t_3]$, représentant les déformations uniformes qui peuvent être appliquées à la section, et $[w_1 \ w_2 \ w_3]$ représentant les déformations linéaires qui peuvent être appliquées résultant des mouvements de corps rigide d'une surface fictive antérieure par rapport à une surface postérieure par rapport à un point de référence ayant pour coordonnées X_0 et Y_0 .

$$\underline{\mathbf{u}}(x, y, z) = \underline{\mathbf{u}}_1(x, y) + \underline{\mathbf{u}}_0(x, y, z) \quad (\text{B.1})$$

où $\underline{\mathbf{u}}_1$ est le champ de déplacement 2D et $\underline{\mathbf{u}}_0$ le champ de déplacement issu des degrés de liberté généralisés :

$$\begin{aligned} u_x &= u_{1x} + t_1 z - w_3(y - Y_0)z \\ u_y &= u_{1y} + t_2 z + w_3(x - X_0)z \\ u_z &= t_3 z + w_1(y - Y_0)z - w_2(x - X_0)z \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Si on se limite à la formulation avec champ uniforme dans la direction hors-plan, on obtient la formulation qui a été utilisée dans ces travaux en fixant tous les degrés de liberté supplémentaires égaux à 0, à l'exception de t_3 .

$$\begin{aligned} u_x &= u_{1x} \\ u_y &= u_{1y} \\ u_z &= t_3 z \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

On peut alors appliquer une déformation uniforme dans l'axe normal au plan de la section $u_{z,z} = t_3 = E_{33}$. Dans le cas d'un calcul éléments finis périodique, on peut maintenant appliquer des déformations multi-axiales avec des composantes hors-plan, mais en conservant les cisaillements hors-plan nuls $E_{13} = E_{31} = 0$ et $E_{23} = E_{32} = 0$.

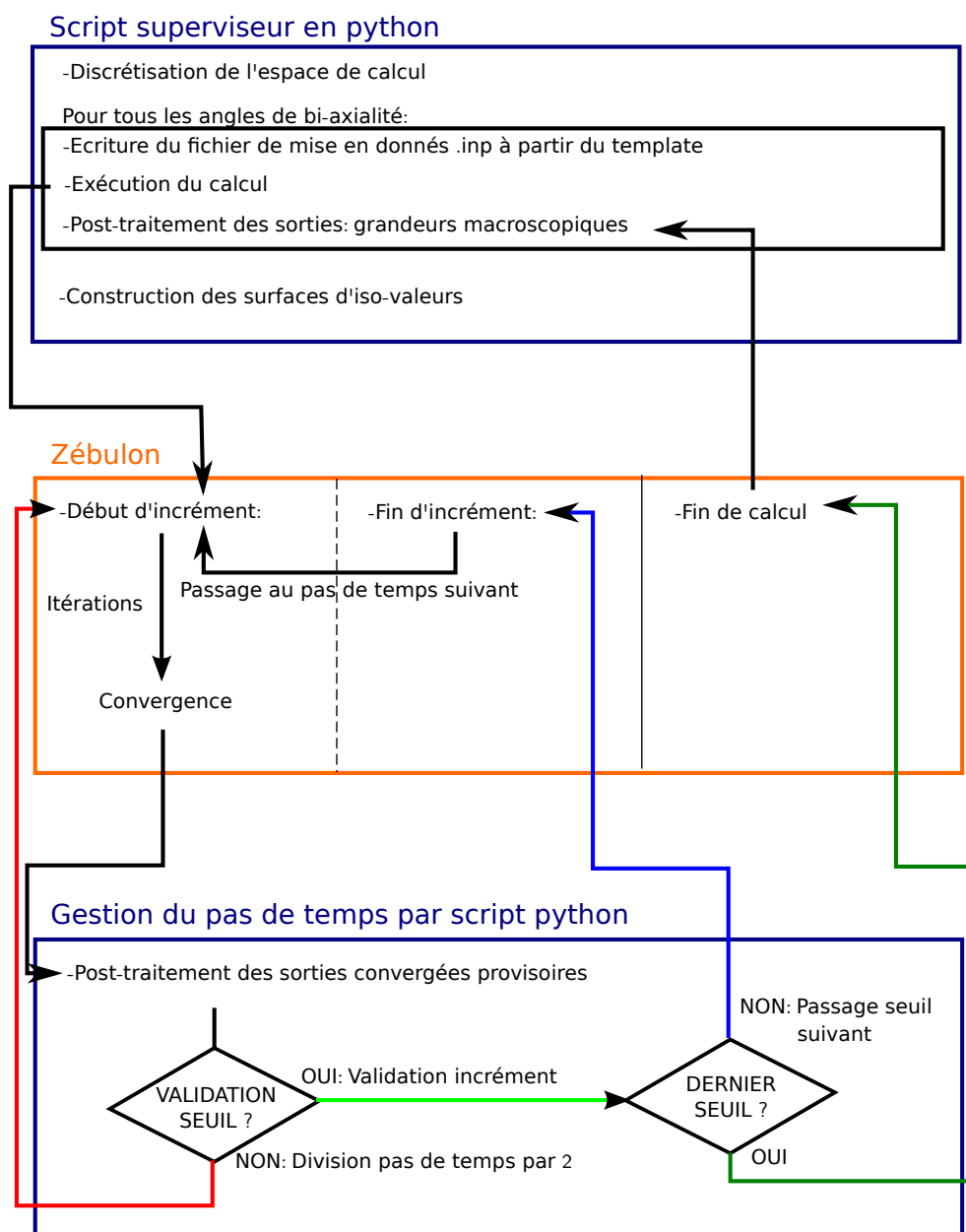
Annexe C

Contrôle de calculs éléments finis à l'aide de critères post-traités

Il peut être intéressant de piloter un calcul éléments finis en fonction un critère défini par l'utilisateur. Ainsi, en cours de calcul, avant l'étape de validation de chaque incrément, il est possible dans le code de calcul Z-set de post-traiter des grandeurs disponibles et de définir des règles de modification de paramètres de calculs telles que le pas de temps ou les conditions aux limites.

Contrôle du pas de temps dans un calcul implicite non linéaire avec un critère sur une grandeur post-traitée

La construction de surfaces de seuils d'iso-valeurs d'une grandeur post-traitée présente des difficultés de convergence vers la valeur seuil. En effet, un calcul implicite non-linéaire est incrémental et seule la convergence de chaque incrément gouverne le pas de temps. Ainsi, si une grandeur post-traitée du calcul est la grandeur à laquelle on s'intéresse il est nécessaire de contrôler le pas de temps en fonction d'un critère sur cette grandeur. On propose donc un pilotage du pas de temps en fonction de plusieurs choix de grandeur (figure C.1) : une déformation équivalente (total ou inélastique), une densité de travail (totale ou inélastique) ou tout autre grandeur choisie par l'utilisateur. La méthode se décompose en deux parties. D'abord, un superviseur génère des mises en données et lance un grand nombre de calculs dans un espace choisie (contraintes ou déformations) bi-axial ou tri-axial. Puis dans chaque calcul Z-set, un script pilote le pas de temps en calculant au cours de l'incrément la grandeur pour le valider en fonction d'une valeur seuil choisie pour cette grandeur. Puis finalement, le superviseur construit les surfaces d'iso-valeurs à partir des résultats de tous les calculs. Cette méthode est applicable pour la caractérisation du comportement multi-axial d'un VER calculé en homogénéisation périodique mais, également, pour valider une loi de comportement soumise à des chargements multi-axiaux.



Contrôle du chemin de chargement d'un calcul implicite un critère sur une grandeur post-traitée

Le suivi d'un chemin de chargement donné est réalisé à l'aide de ce script qui annule le pas de temps si le critère n'est pas respecté et modifie les conditions aux limites jusqu'à validation du critère.

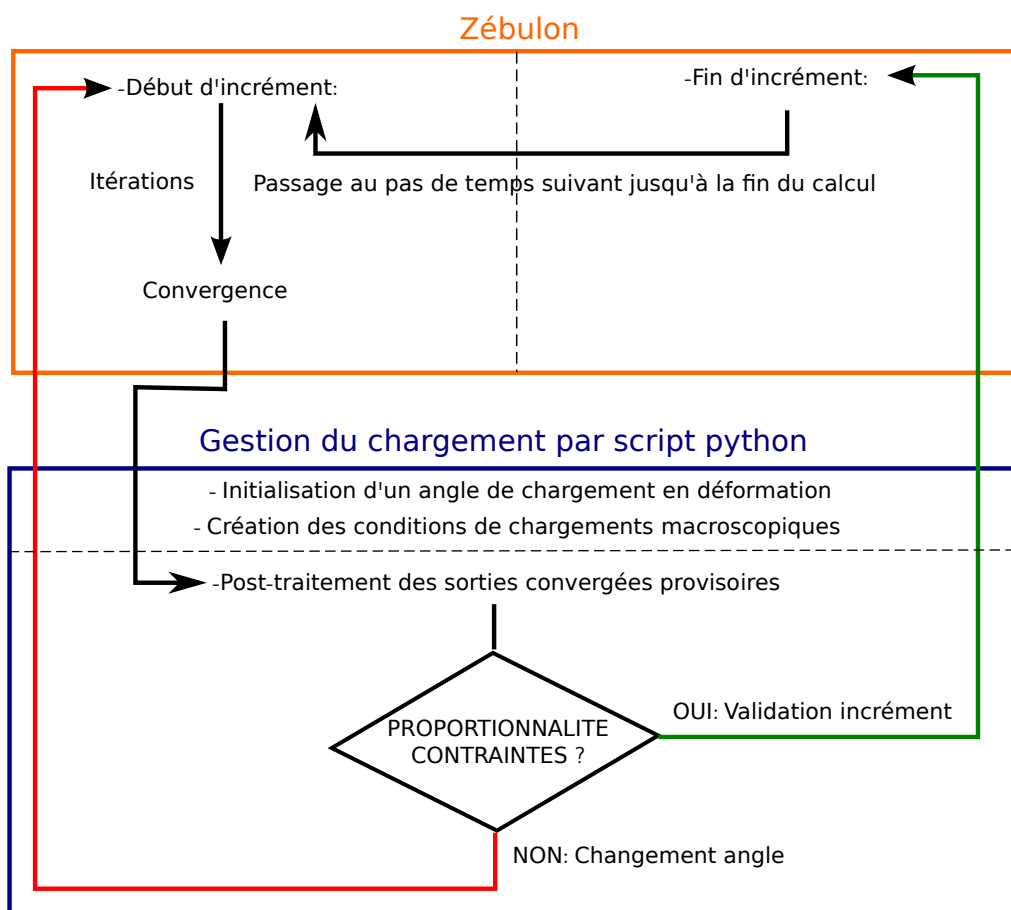


FIG. C.2 – Schéma de fonctionnement du script de pilotage du chemin de chargement en contraintes

Annexe D

Vérification de la convexité du critère de Hill à coefficient négatifs

La Loi Homogène Equivalente identifiée en chapitre 3 pour l'empilement carré a son comportement inélastique modélisé par un critère de plasticité compressible de type Green (Green, 1972) avec une contrainte équivalente de type Hill (Hill, 1948). Les paramètres identifiés en section 3.2 sont fournis dans le tableau 3.3 de cette même section. On remarque que la valeur du paramètre H_{3333} est négative, on se pose alors la question de la convexité du critère pour une telle valeur. On utilise la notation de Voigt pour représenter le tenseur de Hill d'ordre quatre $\underline{\underline{H}}$. Ainsi, $H_{1111} = H_{11}$, $H_{2222} = H_{22}$, $H_{3333} = H_{33}$ et $H_{1212} = H_{66}$. On note la contrainte :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

On verifie donc que les paramètres identifiés verifient la convexité du critère de plasticité utilisé. Le critère est composé d'une terme linéaire gouvernant la compressibilité de la forme $\underline{\underline{P}} : \underline{\underline{\sigma}}$ avec :

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \left(\underline{\underline{P}} : \underline{\underline{\sigma}} \right) = \underline{\underline{0}}$$

La hessienne de ce terme ayant toutes ses composantes nulles, par conséquent ce terme n'affecte pas la convexité du critère.

La critère est aussi composé d'un autre terme de contrainte équivalente qui s'écrit sous la forme :

$$\sigma_{eq} = \underline{\underline{\sigma}}_{dev} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\sigma}}_{dev}$$

où :

$$\boldsymbol{\sigma}_{dev} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_{11}}{3} - \frac{\sigma_{22}}{3} - \frac{\sigma_{33}}{3} \\ -\frac{\sigma_{11}}{3} + \frac{2\sigma_{22}}{3} - \frac{\sigma_{33}}{3} \\ -\frac{\sigma_{11}}{3} - \frac{\sigma_{22}}{3} + \frac{2\sigma_{33}}{3} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{H}_{\approx} = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix}$$

La hessienne prend la forme :

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} (\sigma_{eq}) = \begin{bmatrix} \frac{8H_{11}}{9} + \frac{2H_{22}}{9} + \frac{2H_{33}}{9} & -\frac{4H_{11}}{9} - \frac{4H_{22}}{9} + \frac{2H_{33}}{9} & -\frac{4H_{11}}{9} + \frac{2H_{22}}{9} - \frac{4H_{33}}{9} & 0 \\ -\frac{4H_{11}}{9} - \frac{4H_{22}}{9} + \frac{2H_{33}}{9} & \frac{2H_{11}}{9} + \frac{8H_{22}}{9} + \frac{2H_{33}}{9} & \frac{2H_{11}}{9} - \frac{4H_{22}}{9} - \frac{4H_{33}}{9} & 0 \\ -\frac{4H_{11}}{9} + \frac{2H_{22}}{9} - \frac{4H_{33}}{9} & \frac{2H_{11}}{9} - \frac{4H_{22}}{9} - \frac{4H_{33}}{9} & \frac{2H_{11}}{9} + \frac{2H_{22}}{9} + \frac{8H_{33}}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2H_{66} \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de la hessienne sont :

$$\begin{bmatrix} H_I = 0 \\ H_{II} = 2H_{66} \\ H_{III} = \frac{2H_{11}}{3} + \frac{2H_{22}}{3} + \frac{2H_{33}}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{H_{11}^2 - H_{11}H_{22} - H_{11}H_{33} + H_{22}^2 - H_{22}H_{33} + H_{33}^2} \\ H_{IV} = \frac{2H_{11}}{3} + \frac{2H_{22}}{3} + \frac{2H_{33}}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{H_{11}^2 - H_{11}H_{22} - H_{11}H_{33} + H_{22}^2 - H_{22}H_{33} + H_{33}^2} \end{bmatrix}$$

les valeurs de tenseur \boldsymbol{H}_{\approx} sont $H_{11} = H_{22} = 5.2$, $H_{33} = -2.5$ et $H_{66} = 1.$, ce qui donne des valeurs propres respectivement égales à :

$$\begin{bmatrix} H_I = 0 \\ H_{II} = 2 \\ H_{III} = 10.4 \\ H_{IV} = 0.1334 \end{bmatrix}$$

Toutes les valeurs propres de la hessienne du critère sont positives ou nulles, on en conclue que le critère est convexe pour les valeurs identifiées des paramètres de LHE.

Annexe E

Réponses mécaniques de structures sandwichs pour des chargements quasi-statiques et dynamiques

Les résultats d'essais en compression sont présentés dans cette annexe. Un échantillon testé à chaque vitesse de chargement (5 mm/min, 500 mm/min, 1 m/s et 10 m/s) est présenté pour chaque empilement de tubes. Les essais en compression ont été réalisés au Département d'Aéroélasticité et de Dynamique des Structures de l'Onera par G. Portemont et A. Deudon.

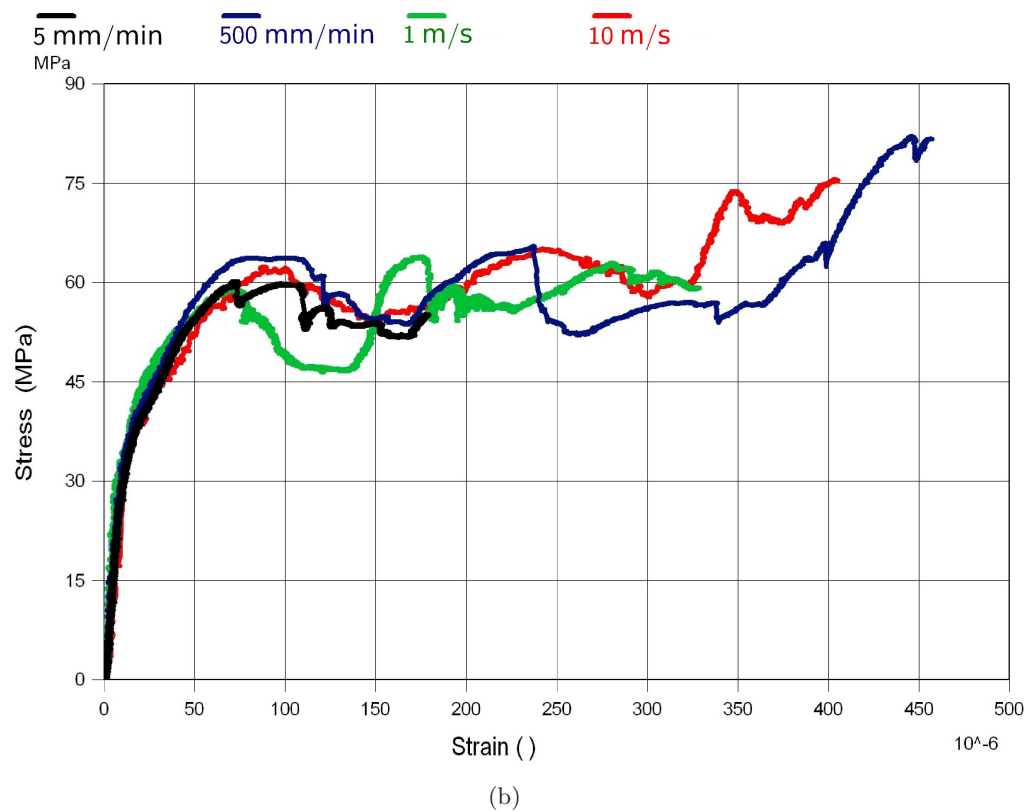
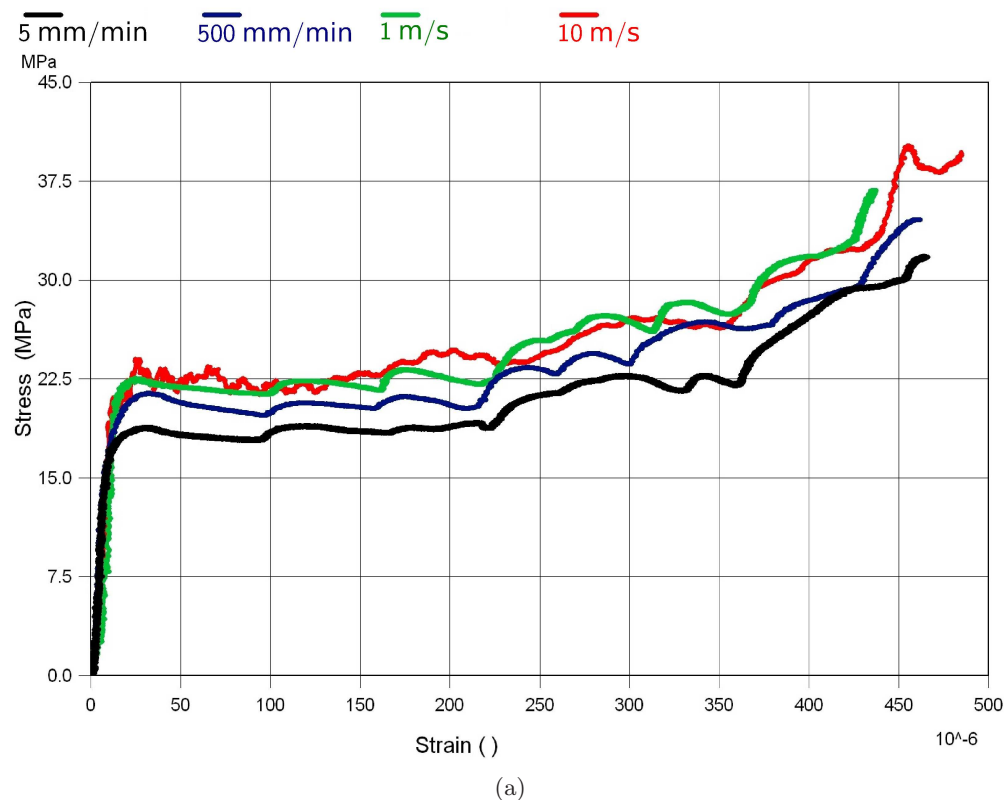


FIG. E.1 – Essais de compression sur structures sandwichs dont le cœur est : (a) en empilement carré, (b) en empilement hexagonal

Bibliographie

- Ajdari, A., H. Nayeb-Hashemi, P. Canavan et G. Warner. 2008, «Effect of defects on elastic-plastic behavior of cellular materials», *Materials Science and Engineering : A*, vol. 487, n° 1, p. 558–567.
- Alart, P., M. Barboteu et J. Gril. 2004, «A numerical modelling of non linear 2d-frictional multicontact problems : application to post-buckling in cellular media», *Computational Mechanics*, vol. 34, n° 4, p. 298–309.
- Andrews, E., L. Gibson et M. Ashby. 1999, «The creep of cellular solids», *Acta materialia*, vol. 47, n° 10, p. 2853–2863.
- Andrews, E., G. Gioux, P. Onck et L. Gibson. 2001, «Size effects in ductile cellular solids. part ii : experimental results», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 43, n° 3, p. 701–713.
- Asada, T. et N. Ohno. 2007, «Fully implicit formulation of elastoplastic homogenization problem for two-scale analysis», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, n° 22, p. 7261–7275.
- Asada, T., Y. Tanaka et N. Ohno. 2009, «Two-scale and full-scale analyses of elastoplastic honeycomb blocks subjected to flat-punch indentation», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 46, n° 7, p. 1755–1763.
- Ashby, M. 2013, «Designing architected materials», *Scripta Materialia*, vol. 68, n° 1, p. 4–7.
- Badiche, X., S. Forest, T. Guibert, Y. Bienvenu, J.-D. Bartout, P. Ienny, M. Croset et H. Bernet. 2000, «Mechanical properties and non-homogeneous deformation of open-cell nickel foams : application of the mechanics of cellular solids and of porous materials», *Materials Science and Engineering : A*, vol. 289, n° 1, p. 276–288.
- Barlat, F., D. J. Lege et J. C. Brem. 1991, «A six-component yield function for anisotropic materials», *International Journal of Plasticity*, vol. 7, n° 7, p. 693–712.
- Bastawros, A., H. Bart-Smith et A. Evans. 2000, «Experimental analysis of deformation mechanisms in a closed-cell aluminum alloy foam», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 48, n° 2, p. 301–322.

- Besse, C. C. et D. Mohr. 2012, «Plasticity of formable all-metal sandwich sheets : Virtual experiments and constitutive modeling», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49, n° 19, p. 2863–2880.
- Besson, J., G. Cailletaud, J. Chaboche, S. Forest et M. Blétry. 2009, *Non-Linear Mechanics of Materials. Series : Solid Mechanics and Its Applications, Vol. 167*, Springer, ISBN.
- Boutin, C. et J. Auriault. 1990, «Dynamic behaviour of porous media saturated by a viscoelastic fluid. application to bituminous concretes», *International journal of engineering science*, vol. 28, n° 11, p. 1157–1181.
- Bron, F. et J. Besson. 2004, «A yield function for anisotropic materials : application to aluminum alloys», *International Journal of Plasticity*, vol. 20, n° 4, p. 937–963.
- Burteau, A., F. N’Guyen, J.-D. Bartout, S. Forest, Y. Bienvenu, S. Saberi et D. Naumann. 2012, «Impact of material processing and deformation on cell morphology and mechanical behavior of polyurethane and nickel foams», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49, n° 19, p. 2714–2732.
- Cailletaud, G., S. Forest, D. Jeulin, F. Feyel, I. Galliet, V. Mounoury et S. Quilici. 2003, «Some elements of microstructural mechanics», *Computational Materials Science*, vol. 27, n° 3, p. 351–374.
- Cailletaud, G. et K. Sai. 1995, «Study of plastic/viscoplastic models with various inelastic mechanisms», *International Journal of Plasticity*, vol. 11, n° 8, p. 991–1005.
- Carrère, N., S. Kruch, A. Vassel et J.-L. Chaboche. 2002, «Damage mechanisms in unidirectional sic/ti composites under transverse creep loading : experiments and modeling», *International Journal of Damage Mechanics*, vol. 11, n° 1, p. 41–63.
- Carrere, N., J.-F. Maire, S. Kruch et J.-L. Chaboche. 2004, «Multiscale analysis of sic/ti composites», *Materials Science and Engineering : A*, vol. 365, n° 1, p. 275–281.
- Caty, O., E. Maire, S. Youssef et R. Bouchet. 2008, «Modeling the properties of closed-cell cellular materials from tomography images using finite shell elements», *Acta Materialia*, vol. 56, n° 19, p. 5524–5534.
- Chaboche, J., S. Kruch, J. Maire et T. Pottier. 2001, «Towards a micromechanics based inelastic and damage modeling of composites», *International Journal of Plasticity*, vol. 17, n° 4, p. 411–439.
- Christman, T., A. Needleman et S. Suresh. 1989, «An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites», *Acta Metallurgica*, vol. 37, n° 11, p. 3029–3050.
- Combaz, E., C. Bacciarini, R. Charvet, W. Dufour, F. Dauphin et A. Mortensen. 2010, «Yield surface of polyurethane and aluminium replicated foam», *Acta Materialia*, vol. 58, n° 15, p. 5168–5183.

- Dehoff, R. et S. Babu. 2010, «Characterization of interfacial microstructures in 3003 aluminum alloy blocks fabricated by ultrasonic additive manufacturing», *Acta Materialia*, vol. 58, n° 13, p. 4305–4315.
- Deshpande, V. et N. Fleck. 2000, «Isotropic constitutive models for metallic foams», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 48, n° 6, p. 1253–1283.
- Deshpande, V. et N. Fleck. 2001, «Multi-axial yield behaviour of polymer foams», *Acta materialia*, vol. 49, n° 10, p. 1859–1866.
- Dillard, T., S. Forest et P. Ienny. 2006, «Micromorphic continuum modelling of the deformation and fracture behaviour of nickel foams», *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 25, n° 3, p. 526–549.
- Dirrenberger, J. 2012, *Effective properties of architected materials*, thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- Dirrenberger, J., S. Forest, D. Jeulin et C. Colin. 2011, «Homogenization of periodic auxetic materials», *Procedia Engineering*, vol. 10, p. 1847–1852.
- Driemeier, L., C. Comi et S. Proença. 2005, «On nonlocal regularization in one dimensional finite strain elasticity and plasticity», *Computational Mechanics*, vol. 36, n° 1, p. 34–44.
- Dvorak, G. J. 1992, «Transformation field analysis of inelastic composite materials», *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical and Physical Sciences*, vol. 437, n° 1900, p. 311–327.
- Evans, A. G., J. Hutchinson et M. Ashby. 1998, «Multifunctionality of cellular metal systems», *Progress in Materials Science*, vol. 43, n° 3, p. 171–221.
- Fazekas, A., R. Dendievel, L. Salvo et Y. Brechet. 2002, «Effect of microstructural topology upon the stiffness and strength of 2d cellular structures», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, n° 10, p. 2047–2066.
- Feyel, F. 2003, «A multilevel finite element method (fe2) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua», *Computer Methods in applied Mechanics and engineering*, vol. 192, n° 28, p. 3233–3244.
- Feyel, F. et J.-L. Chaboche. 2000, «Fe2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials», *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 183, n° 3, p. 309–330.
- Forest, S. et K. Sab. 1998, «Cosserat overall modeling of heterogeneous materials», *Mechanics Research Communications*, vol. 25, n° 4, p. 449–454.
- Forest, S. et R. Sievert. 2006, «Nonlinear microstrain theories», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, n° 24, p. 7224–7245.

- Forest, S. et D. K. Trinh. 2011, «Generalized continua and non-homogeneous boundary conditions in homogenisation methods», *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 91, n° 2, p. 90–109.
- Fritzen, F. et T. Böhlke. 2011, «Nonuniform transformation field analysis of materials with morphological anisotropy», *Composites Science and Technology*, vol. 71, n° 4, p. 433–442.
- Fritzen, F., S. Forest, T. Böhlke, D. Kondo et T. Kanit. 2012, «Computational homogenization of elasto-plastic porous metals», *International Journal of Plasticity*, vol. 29, p. 102–119.
- Fritzen, F., S. Forest, D. Kondo et T. Böhlke. 2013, «Computational homogenization of porous materials of green type», *Computational Mechanics*, vol. 52, n° 1, p. 121–134.
- Ghosh, S., K. Lee et S. Moorthy. 1996, «Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenization and voronoi cell finite element model», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 132, n° 1, p. 63–116.
- Ghosh, S., K. Lee et P. Raghavan. 2001, «A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, n° 14, p. 2335–2385.
- Gibson, L. J., M. F. Ashby, G. S. Schajer et C. I. Robertson. 1982, «The mechanics of two-dimensional cellular materials», *Proc. Roy. Soc.*, vol. A382, n° 1, p. 25–42.
- Glüge, R. 2013, «Generalized boundary conditions on representative volume elements and their use in determining the effective material properties», *Computational Materials Science*, vol. 79, p. 408–416.
- Green, R. 1972, «A plasticity theory for porous solids», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 14, n° 4, p. 215–224.
- Guo, X. E. et L. J. Gibson. 1999, «Behavior of intact and damaged honeycombs : a finite element study», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 41, n° 1, p. 85–105.
- Hill, R. 1948, «A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals», *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 193, n° 1033, p. 281–297.
- Hill, R. 1958, «A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 6, n° 3, p. 236–249.
- Hill, R. 1967, «The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 15, n° 2, p. 79–95.
- Iltchev, A., V. Marcadon, S. Kruch et S. Forest. «Computational homogenisation of periodic cellular materials and application to structural modelling», *International Journal of Mechanical Sciences*.

- Kanouté, P., D. Boso, J. Chaboche et B. Schrefler. 2009, «Multiscale methods for composites : a review», *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 16, n° 1, p. 31–75.
- Karafillis, A. et M. Boyce. 1993, «A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 41, n° 12, p. 1859–1886.
- Kouznetsova, V., W. Brekelmans et F. Baaijens. 2001, «An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials», *Computational Mechanics*, vol. 27, n° 1, p. 37–48.
- Kouznetsova, V., M. G. Geers et W. M. Brekelmans. 2002, «Multi-scale constitutive modeling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 54, n° 8, p. 1235–1260.
- Kruch, S. et S. Forest. 1998, «Computation of coarse grain structures using a homogeneous equivalent medium», *Le Journal de Physique IV*, vol. 8, n° PR8, p. Pr8–197.
- Largenton, R., J.-C. Michel, P. Suquet et R. Masson. 2011, «Modélisation du comportement effectif du combustible mox par une analyse micromécanique en champs de transformation non uniformes», *Mécanique & Industries*, vol. 12, n° 03, p. 175–181.
- Lhuissier, P., A. Fallet, L. Salvo et Y. Brechet. 2009, «Quasistatic mechanical behaviour of stainless steel hollow sphere foam : Macroscopic properties and damage mechanisms followed by x-ray tomography», *Materials Letters*, vol. 63, n° 13, p. 1113–1116.
- Mangipudi, K. et P. Onck. 2011, «Multiscale modelling of damage and failure in two-dimensional metallic foams», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 59, n° 7, p. 1437–1461.
- Marcadon, V., C. Davoine, B. Passilly, D. Boivin, F. Popoff, A. Rafray et S. Kruch. 2012, «Mechanical behaviour of hollow-tube stackings : Experimental characterization and modelling of the role of their constitutive material behaviour», *Acta Materialia*, vol. 60, n° 15, p. 5626–5644.
- Marcadon, V. et F. Feyel. 2009, «Modelling of the compression behaviour of metallic hollow-sphere structures : About the influence of their architecture and their constitutive material's equations», *Computational Materials Science*, vol. 47, n° 2, p. 599–610.
- Marcadon, V. et S. Kruch. 2011, «Roles of mechanical heterogeneities and damage on the overall mechanical behaviour of hollow-tube stackings», *Procedia Engineering*, vol. 10, p. 2815–2820.
- Marcadon, V. et S. Kruch. 2013, «Influence of geometrical defects on the mechanical behaviour of hollow-sphere structures», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 50, n° 3, p. 498–510.

- Mazière, M., J. Besson, S. Forest, B. Tanguy, H. Chalons et F. Vogel. 2009, «Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks—part i : Analytical and numerical stability analyses», *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 28, n° 1, p. 36–44.
- Michel, J., H. Moulinec et P. Suquet. 1999, «Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach», *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 172, n° 1, p. 109–143.
- Michel, J., H. Moulinec et P. Suquet. 2000, «A computational method based on augmented lagrangians and fast fourier transforms for composites with high contrast», *CMES(Computer Modelling in Engineering & Sciences)*, vol. 1, n° 2, p. 79–88.
- Michel, J., H. Moulinec et P. Suquet. 2001, «A computational scheme for linear and non-linear composites with arbitrary phase contrast», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 52, n° 1-2, p. 139–160.
- Michel, J.-C. et P. Suquet. 2003, «Nonuniform transformation field analysis», *International journal of solids and structures*, vol. 40, n° 25, p. 6937–6955.
- Molinari, A. et S. Mercier. 2001, «Micromechanical modelling of porous materials under dynamic loading», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 49, n° 7, p. 1497–1516.
- Moulinec, H. et P. Suquet. 1998, «A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure», *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 157, n° 1, p. 69–94.
- Moulinec, H. et P. Suquet. 2003, «Comparison of fft-based methods for computing the response of composites with highly contrasted mechanical properties», *Physica B : Condensed Matter*, vol. 338, n° 1, p. 58–60.
- Ohno, N., D. Okumura et T. Niikawa. 2004, «Long-wave buckling of elastic square honeycombs subject to in-plane biaxial compression», *International journal of mechanical sciences*, vol. 46, n° 11, p. 1697–1713.
- Ohno, N., D. Okumura et H. Noguchi. 2002, «Microscopic symmetric bifurcation condition of cellular solids based on a homogenization theory of finite deformation», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 50, n° 5, p. 1125–1153.
- Okumura, D., N. Ohno et H. Noguchi. 2004, «Elastoplastic microscopic bifurcation and post-bifurcation behavior of periodic cellular solids», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 52, n° 3, p. 641–666.
- Okumura, D., A. Okada et N. Ohno. 2008, «Buckling behavior of kelvin open-cell foams under [001],[011] and [111] compressive loads», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, n° 13, p. 3807–3820.
- Onck, P., E. Andrews et L. Gibson. 2001, «Size effects in ductile cellular solids. part i : modeling», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 43, n° 3, p. 681–699.

- Ostoj-Starzewski, M. 2006, «Material spatial randomness : From statistical to representative volume element», *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 21, n° 2, p. 112–132.
- Panasenko, G. P. 2002, «Partial homogenization», *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 330, n° 10, p. 667–672.
- Papka, S. et S. Kyriakides. 1999a, «Biaxial crushing of honeycombs : Part i : Experiments», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 36, n° 29, p. 4367–4396.
- Papka, S. et S. Kyriakides. 1999b, «In-plane biaxial crushing of honeycombs : Part ii : Analysis», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 36, n° 29, p. 4397–4423.
- Pham, K., V. Kouznetsova et M. Geers. 2013, «Transient computational homogenization for heterogeneous materials under dynamic excitation», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 61, n° 11, p. 2125–2146.
- Pietryga, M. P., I. N. Vladimirov et S. Reese. 2012, «A finite deformation model for evolving flow anisotropy with distortional hardening including experimental validation», *Mechanics of Materials*, vol. 44, p. 163–173.
- Saiki, I., K. Terada, K. Ikeda et M. Hori. 2002, «Appropriate number of unit cells in a representative volume element for micro-structural bifurcation encountered in a multi-scale modeling», *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 191, n° 23, p. 2561–2585.
- Sanders, W. et L. Gibson. 2003a, «Mechanics of bcc and fcc hollow-sphere foams», *Materials Science and Engineering : A*, vol. 352, n° 1, p. 150–161.
- Sanders, W. et L. Gibson. 2003b, «Mechanics of hollow sphere foams», *Materials Science and Engineering : A*, vol. 347, n° 1, p. 70–85.
- Silva, M. J. et L. J. Gibson. 1997, «The effects of non-periodic microstructure and defects on the compressive strength of two-dimensional cellular solids», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 39, n° 5, p. 549–563.
- Silva, M. J., W. C. Hayes et L. J. Gibson. 1995, «The effects of non-periodic microstructure on the elastic properties of two-dimensional cellular solids», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 37, n° 11, p. 1161–1177.
- Smit, R., W. Brekelmans et H. Meijer. 1998, «Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 155, n° 1, p. 181–192.
- Suquet, P. 1987, «Elements of homogenization for inelastic solid mechanics», *Homogenization techniques for composite media*, vol. 272, p. 193–278.
- Takahashi, Y., D. Okumura et N. Ohno. 2010, «Yield and buckling behavior of kelvin open-cell foams subjected to uniaxial compression», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 52, n° 2, p. 377–385.

- Tsuda, M., E. Takemura, T. Asada, N. Ohno et T. Igari. 2010, «Homogenized elastic-viscoplastic behavior of plate-fin structures at high temperatures : Numerical analysis and macroscopic constitutive modeling», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 52, n° 5, p. 648–656.
- Tvergaard, V. 1990, «Analysis of tensile properties for a whisker-reinforced metal-matrix composite», *Acta metallurgica et materialia*, vol. 38, n° 2, p. 185–194.
- Wang, A.-J. et D. McDowell. 2005, «Yield surfaces of various periodic metal honeycombs at intermediate relative density», *International Journal of Plasticity*, vol. 21, n° 2, p. 285–320.
- Wang, D.-A. et J. Pan. 2006, «A non-quadratic yield function for polymeric foams», *International journal of plasticity*, vol. 22, n° 3, p. 434–458.
- Xue, Z. et J. W. Hutchinson. 2004, «Constitutive model for quasi-static deformation of metallic sandwich cores», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, n° 13, p. 2205–2238.

Homogénéisation périodique d'un matériau cellulaire en élasto-plasticité et application au calcul de structures : des petites aux grandes déformations

RESUME : Grâce à leurs bonnes propriétés mécaniques spécifiques, les matériaux cellulaires architecturés présentent un fort intérêt pour répondre aux problématiques du secteur aéronautique. Cependant, la modélisation d'une structure macroscopique incluant un matériau cellulaire nécessite, soit de modéliser complètement l'architecture à l'échelle mésoscopique - ce qui est coûteux en temps de calcul - soit d'utiliser un Milieu Homogène Equivalent (MHE). Ainsi, cette thèse propose de caractériser un matériau cellulaire modèle constitué d'un empilement de tubes, selon un motif carré ou hexagonal, puis d'identifier un modèle phénoménologique rendant compte du comportement mécanique inélastique du matériau. Dans un premier temps, le matériau est caractérisé sous chargements multi-axiaux à l'aide de simulations éléments finis périodiques en petites déformations. Le comportement homogénéisé en petites déformations est ensuite utilisé pour l'identification d'une Loi Homogène Equivalente (LHE) compressible et anisotrope, qui permet la modélisation de structures sandwichs en remplaçant le cœur cellulaire par son MHE. Une comparaison est réalisée entre les réponses mécaniques des simulations de référence complètement maillées et celles utilisant l'approche par MHE, validant ainsi la pertinence de la méthode multi-échelle de modélisation proposée. La caractérisation en grandes déformations des deux types d'empilement est ensuite menée. D'abord, les effets de bords et les instabilités qui gouvernent le comportement macroscopique sont étudiés. Puis, après une étude du volume élémentaire représentatif des empilements, la caractérisation du comportement inélastique par la technique de l'homogénéisation périodique est réalisée. Le comportement adoucissant en compression de l'empilement hexagonal est ainsi étudié. Finalement, une extension des LHE identifiées en petites déformations est proposée pour rendre compte du comportement en compression du matériau observé en grandes déformations.

Mots clés : Homogénéisation périodique, transformations finies, instabilités, modèles phénoménologiques, élasto-plasticité compressible

Periodic homogenisation of a cellular material in elastoplasticity and application to structural modelling: from small to large deformations

ABSTRACT: Cellular materials have excellent specific properties, which make them attractive for aeronautical applications. However, modelling macroscopic structures including a cellular material is either very costly in terms of computational time if the whole mesoscopic structure is considered or a Homogeneous Equivalent Medium (HEM) has to be used. This Ph.D. dissertation presents, the characterisation of a cellular material built from a stacking of tubes with a square or hexagonal based pattern and the identification of a phenomenological model of their inelastic mechanical behaviour. First, the material is characterised for multi-axial loadings through a periodic finite element model in small deformations for each tube stacking pattern. The macroscopic behaviour is then used to identify a compressible anisotropic Homogeneous Equivalent Law (HEL). Within the infinitesimal strain hypothesis, a comparison is carried out between reference full scale models and HEM based ones of sandwich structures with a cellular core, confirming the relevance of the proposed multi-scale method. Then, the mechanical behaviour of each tube stacking is characterised for large deformations in order to study the influence of the boundary size effects and the instabilities in the core on the macroscopic behaviour of sandwich structures. After a study on the representative volume element, the macroscopic inelastic behaviour is characterised through the periodic homogenisation technique, especially the softening observed in compression for the hexagonal pattern. Finally, an extension of the HELs identified in small deformations is proposed to model the behaviour observed in large deformations.

Keywords : Periodic homogenisation, finite strain, instability, phenomenological models, compressible elastoplasticity